<NCS를 기반으로 한 직무 기초수학>

[문제] 답+풀이

3장

Chapter_03

[문제 3-1] (a) $a_1=1,\ a_2=\frac{2}{3},\ a_3=\frac{4}{9},\ a_4=\frac{8}{27}$ (b) $a_1=0,\ a_2=\frac{1}{3},\ a_3=\frac{1}{2},\ a_4=\frac{3}{5}$

풀이

(a) $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 차례대로 대입하여 항을 구하면 $a_1=1,\ a_2=\frac{2}{3},\ a_3=\frac{4}{9},\ a_4=\frac{8}{27}$

(b) $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 차례대로 대입하여 항을 구하면 $a_1=0,\ a_2=\frac{1}{3},\ a_3=\frac{1}{2},\ a_4=\frac{3}{5}$

[문제 3-2] (a) $a_n=2n$ (b) $a_n=(n+1)\cdot(n+2)$ (c) $a_n=(-1)^n$ (d) $a_n=(-1)^{n+1}n$

풀이

(a) 2의 배수이므로 $a_n=2n$

(b) 연속된 두 자연수의 곱이므로 $a_n=(n+1)\cdot(n+2)$

(c) -1과 1이 반복되므로 $a_n=(-1)^n$

(d) 양수와 음수가 반복되므로 $a_n=(-1)^{n+1}n$

[문제 3-3] (a) $\square=1833$ (b) $\square=325$ (c) $\square=22$ (d) $\square=19$

풀이

(a) 첫 항부터 차례대로 $2=2^1$, $4=2^2$, $8=2^3$씩 줄어들므로 다음 항은 전 항보다 $2^4=16$만큼 줄어든다. 따라서 1849-16=1833이므로 $\square=1833$

(b) $a_n=3a_{n-1}-2$이므로 $a_5=3a_4-2=3\cdot 109-2=325$이다. 따라서 $\square=325$

(c) 첫 항부터는 한 항씩 건너뛰며 2씩 줄어들므로 28→26→24이고, 두 번째 항부터는 한 항씩 건너뛰며 2씩 늘어나므로 29→31→33이다. 따라서 $\square=22$

(d) 첫 항부터 차례대로 2, 3, 4씩 늘어나므로 14 다음에는 5가 늘어난 19이다. 따라서 $\square=19$

[문제 3-4] ④

풀이

이 수열은 먼저 수를 읽고 그것의 개수를 쓴 것이다. 이를테면 12는 1이 1개, 2가 1개이므로 11 다음에 오는 항은 1121이고, 1121은 1이 2개, 2가 1개, 1이 1개이므로 122111이다. 따라서 112213 다음에 오는 수는 1이 2개, 2가 2개, 1이 1개, 3이 1개이므로 12221131이다.

[문제 3-5] 등차수열: (a), (d) 공차: (a) $d=3$ (b) $d=-\frac{1}{2}$

풀이

(a) 연속된 두 항의 차가 3이므로 공차가 $d=3$인 등차수열이다.

(b) 연속된 두 항의 차가 모두 다르므로 등차수열이 아니다.

(c) 연속된 두 항의 차가 모두 다르므로 등차수열이 아니다.

(d) 연속된 두 항의 차는 $-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}$이므로 공차가 $d=-\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

[문제 3-6] (a) $a_n=7n-12$ (b) $a_n=-4n+6$

풀이

(a) $a_n=-5+(n-1)\cdot 7=7n-12$

(b) 첫째항이 2이고 공차가 -4이므로 $a_n=2+(n-1)\cdot(-4)=-4n+6$

[문제 3-7] ⑤

풀이
첫째항이 80이고 공차가 5이므로 $a_n = 80+(n-1)\cdot 5 = 5n+75$
따라서 $200 = 5n+75$를 만족하는 n은 $n=25$이므로 200은 이 등차수열의 제25번째 항이다.

[문제 3-8] (a) $a_n = 2n-7$ (b) $a_n = 6n+1$
풀이
(a) $a_5 = a+4d = 3$
$a_9 = a+8d = 11$
따라서 $a=-5$, $d=2$이므로 $a_n = -5+(n-1)\cdot 2 = 2n-7$
(b) $a_4 = a+3d = 25$
$a_{10} = a+9d = 61$
따라서 $a=7$, $d=6$이므로 $a_n = 7+(n-1)\cdot 6 = 6n+1$

[문제 3-9] (a) 6, 22 (b) 7, -1
풀이
(a) 등차중항을 이용하면 차례대로 $\frac{-2+14}{2}=6$, $\frac{14+30}{2}=22$
따라서 -2, 6, 14, 22, 30,⋯이다.
(b) 등차중항을 이용하면 차례대로 $\frac{11+3}{2}=7$, $\frac{3-5}{2}=-1$이다.
따라서 11, 7, 3, -1, -5, ⋯이다.

[문제 3-10] (a) 110 (b) -85
풀이
(a) $S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이므로 $S_{10} = \frac{10\{2\cdot(-7)+(10-1)\cdot 4\}}{2} = 110$
(b) 첫째항과 둘째 항을 이용하여 공차를 구하면 $d = a_2 - a_1 = 2-5 = -3$이므로 $S_{10} = \frac{10\{2\cdot 5+(10-1)\cdot(-3)\}}{2} = -85$

[문제 3-11] ②
풀이
등차수열의 첫째항이 a이고 제n항이 l일 때 $S_n = \frac{n(a+l)}{2}$이고, $a_n = a+(n-1)d$이다. $60 = 10+(n-1)\cdot 2$이므로 $n-1=25$, 즉 $n=26$이다. 따라서 $S_{26} = \frac{26(10+60)}{2} = 910$

[문제 3-12] (a) 375석 (b) 510석 (c) 885석
풀이
(a) 첫째항이 4이고 공차가 3인 등차수열의 제15항까지의 합을 구하면 된다.
$$S_{15} = \frac{15\{2\cdot 4+(15-1)\cdot 3\}}{2} = 375$$
따라서 B구역의 관람석의 수는 375석이다.
(b) 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열의 제15항까지의 합을 구하면 된다.
$$S_{15} = \frac{15\{2\cdot 3+(15-1)\cdot 2\}}{2} = 255$$
따라서 A구역과 C구역의 관람석의 수는 $255\times 2 = 510$(석)
(c) 이 공연장의 전체 관람석의 수는 375+510=885(석)

[문제 3-13] (a) -2 (b) $\frac{1}{4}$
풀이
(a) 첫째항이 2이고 -2를 곱하면 둘째 항이 되므로 공비는 -2이다.

(b) 첫째항이 4이고 $\frac{1}{4}$을 곱하면 둘째 항이 되므로 공비는 $\frac{1}{4}$이다.

[문제 3-14] (a) -54 (b) $\frac{1}{3}$

풀이

(a) 공비가 3인 등비수열이므로 □ 안에 알맞은 수는 -54이다.

(b) 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로 □ 안에 알맞은 수는 $\frac{1}{3}$이다.

[문제 3-15] (a) $a_n = (-8) \cdot 3^{n-1}$ (b) $a_n = (-5) \cdot (-1)^{n-1}$

풀이

(a) $a_1 = -8$이고 $r = 3$이므로 일반항은 $a_n = (-8) \cdot 3^{n-1}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$

(b) $a_1 = -5$이고 공비가 $r = -1$이므로 일반항은 $a_n = (-5) \cdot (-1)^{n-1}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$

[문제 3-16] ①

풀이

첫째항이 81이고 공비가 $\frac{1}{3}$이므로 $a_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{243}$

즉, $3^{n-1} = 81 \cdot 243 = 3^4 \cdot 3^5 = 3^9$

따라서 $n = 10$이므로 제10항이다.

[문제 3-17] (a) 64, 4 (b) 14, 686

풀이

(a) 등비중항을 이용하면 차례대로 $256 \cdot 16 = 4^4 \cdot 4^2 = 4^6 = (4^3)^2 = 64^2$, $16 \cdot 1 = 4^2$

따라서 256, 64, 16, 4, 1이므로 □ 안에 알맞은 수는 64와 4이다.

(b) 등차중항을 이용하면 차례대로

$$2 \cdot 98 = 2 \cdot 2 \cdot 49 = (2 \cdot 7)^2 = 14^2,\ 98 \cdot 4802 = (2 \cdot 7^2) \cdot (2 \cdot 7^4) = 2^2 \cdot 7^6 = (2 \cdot 7^3)^2 = 686^2 \text{이다.}$$

따라서 2, 14, 98, 686, 4802이므로 □ 안에 알맞은 수는 14와 686이다.

[문제 3-18] ③

풀이

첫째항이 100이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$S_{10} = \frac{100 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 100 \times 1023 = 102300$$

따라서 10일 후에는 모두 102300원을 저금할 수 있다.

[문제 3-19] ⑤

풀이

연이율이 r이고, 1년마다 복리로 매년 초에 일정한 금액 a원을 n년 동안 적립할 때, n년 후 적립금의 원리합계는 $\frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$원이다. 매년 100만 원씩 10년 동안 적립할 때, $1.05^{10} = 1.6$이라 했으므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{1000000(1+0.05)\{(1+0.05)^{10} - 1\}}{0.05} &= \frac{1000000(1.05)\{(1.05)^{10} - 1\}}{0.05} = \frac{1000000(1.05)\{1.6 - 1\}}{\frac{5}{100}} \\ &= \frac{1000000(1.05)(0.6)}{\frac{5}{100}} = \frac{630000 \cdot 100}{5} = 12600000\end{aligned}$$

따라서 10년 후 적립금의 원리합계는 1260만 원이다.

[문제 3-20] (a) 514 (b) 19684

풀이

(a) 주어진 수열의 계차수열을 구하면 1, 2, 4, 8, ⋯, 2^{n-1}, ⋯이다.

따라서 10번째 항은 $2+2^{10-1}=2+2^9=2+512=514$

(b) 주어진 수열의 계차수열을 구하면 1, 3, 9, 27, ⋯, 3^{n-1}, ⋯이다.

따라서 10번째 항은 $1+3^{10-1}=1+3^9=1+19683=19684$

[문제 3-21] (a) $a_n=n^2-2n+4$ (b) $a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$

풀이

(a) 주어진 수열의 계차수열을 구하면 1, 3, 5, 7, ⋯, $2n-1$, ⋯이므로

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2n-1)=3+2\sum_{k=1}^{n-1}n-(n-1)=3+2\times\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)=n^2-2n+4$$

이 식은 $n=1$일 때도 성립하므로 구하는 일반항 a_n은 $a_n=n^2-2n+4$이다.

(b) 주어진 수열의 계차수열을 구하면 3, 6, 9, 12, ⋯, $3n$, ⋯이므로

$$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}3n=2+3\sum_{k=1}^{n-1}n=2+3\times\frac{(n-1)n}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$$

이 식은 $n=1$일 때도 성립하므로 구하는 일반항 a_n은 $a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$이다.

[문제 3-22] 138

풀이

각 군의 첫째항만을 선택하여 수열을 만들면 a_n: 3, 6, 12, 21, 33, ⋯이고,

이 수열의 계차수열은 b_n: 3, 6, 9, 12, ⋯이다.

이다. 따라서 $a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}3k=3+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3}{2}(n^2-n+2)$이므로 제10군의 첫째항은 $\frac{3}{2}(10^2-10+2)=138$

[문제 3-23] (a) 제$(m+n-1)$군의 n번째 수 (b) $\left(\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+n\right)$번째 항

풀이

(a) 분모와 분자의 합이 같은 것끼리 묶으면

$$\left(\frac{1}{1}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\right),\ \left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\right),\ \cdots$$

분모와 분자의 합이 2이면 제1군, 분모와 분자의 합이 3이면 제2군,

분모와 분자의 합이 4이면 제3군, 분모와 분자의 합이 5이면 제4군, ⋯

따라서 $\frac{n}{m}$은 제$(m+n-1)$군의 n번째 수이다.

(b) 제 $(m+n-2)$군까지의 항의 수를 구하면

$$1+2+3+\cdots+(m+n-2)=\frac{(m+n-2)\{1+(m+n-2)\}}{2}=\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}$$

따라서 $\frac{n}{m}$은 수열 $\{a_n\}$의 $\left(\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+n\right)$번째 항이다.

[문제 3-24] (a) 59 (b) -4

풀이

(a) 각 수에 7을 곱한 후에 3을 더한 것이므로 $8\times7+3=59$

(b) 각 수를 3으로 나눈 후에 7을 뺀 것이므로 $9\div3-7=-4$

[문제 3-25] ①

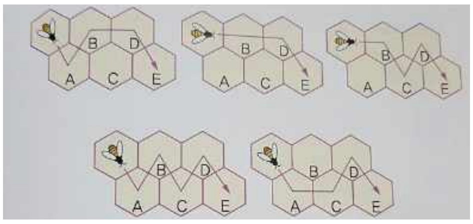
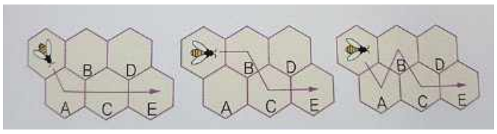
풀이

$5\times8-15=25$, $6\times9-15=39$이므로 $7\times8-15=41$이다.

[문제 3-26] ②

<u>풀이</u>

벌이 옮겨갈 수 있는 각각의 경우의 수를 구하면 피보나치수열과 같음을 알 수 있다. 따라서 1, 2, 3, 5, 8, 13으로 갈 수 있는 방법이 정해지며, 방이 5개인 경우는 모두 8가지이다.

[문제 3-27] $a_n=\frac{4}{9}(10^n-1)$

<u>풀이</u>

$4=\frac{4}{9}\times 9$와 같이 나타낼 수 있으므로 주어진 수열은 다음과 같은 수열로 바꿀 수 있다.

$$(4,\ 44,\ 444,\ 4444,\ \cdots)=\frac{4}{9}(9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ \cdots)$$

그런데 $9=10-1,\ 99=10^2-1,\ 999=10^3-1,\ 9999=10^4-1$이므로

$(4,\ 44,\ 444,\ 4444,\ \cdots)=\frac{4}{9}(10-1,\ 10^2-1,\ 10^3-1,\ 10^4-1,\ \cdots)$

따라서 일반항은 $a_n=\frac{4}{9}(10^n-1)$이다.

[문제 3-28] $a_n=\frac{23}{99}(10^n-1)$

<u>풀이</u>

순환마디 23을 묶어내면

$$23,\ 2323=23\times 101,\ 232323=23\times 10101,\ \cdots$$
$$23,\ 23(10^2+1),\ 23(10^4+10^2+1),\ \cdots$$

이므로 $a_n=23(1+10^2+10^4+\cdots+10^{2n-2})=23\times\frac{(10^2)^n-1}{10^2-1}=\frac{23}{99}(10^{2n}-1)$

따라서 일반항은 $a_n=\frac{23}{99}(10^n-1)$이다.

[문제 3-29] (a) $a_n=(-1)^n\frac{2n-1}{n+1}$ (b) $a_n=2\sin\frac{n\pi}{2}$

<u>풀이</u>

(a) 음과 양이 반복되므로 $(-1)^n$, 분자는 1, 3, 5, 7, ⋯이므로 $2n-1$, 분모는 2, 3, 4, 5, ⋯이므로 $n+1$이다.

따라서 구하는 일반항은 $a_n=(-1)^n\frac{2n-1}{n+1}$이다.

(b) 사인함수의 주기를 이용한다. 주어진 수열은 2(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ⋯)

따라서 구하는 일반항은 $a_n=2\sin\frac{n\pi}{2}$이다.

[문제 3-30] $a_n=\frac{3}{2}\{(-1)^{n-1}+1\}$

<u>풀이</u>

연속된 두 항의 산술평균을 구하면 $\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}$이고, 각 항에서 $\frac{3}{2}$를 뺀 수열 b_n을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \cdots$$

따라서 $b_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{3}{2}$이므로 원래 수열의 일반항은 $a_n=b_n+\frac{3}{2}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\{(-1)^{n-1}+1\}$이다.

[문제 3-31] ㅏ

풀이

ㅑ, ㅕ, ㅜ에 부여된 수를 나타내면 각각 2, 4, 7이다. 즉, 앞의 항에 차례로 2, 3, 4, 5를 더하는 수열이므로 각 모음에 부여된 수를 나타내면 2, 4, 7, 11, 16이다. 따라서 □ 안에 알맞은 모음은 ㅏ이다.

[문제 3-32] ②

풀이

K, O, S에 부여된 수를 나타내면 각각 11, 15, 19이다. 즉, 앞의 항에 차례로 4를 더하는 수열이므로 각 모음에 부여된 수를 나타내면 3, 7, 11, 15, 19이다. 따라서 □ 안에 알맞은 알파벳은 G이다.

[문제 3-33] (a) ㅌ (b) L

풀이

(a) 월, 화, 수, 목, 금, 토이므로 □ 안에 알맞은 문자는 ㅌ이다.

(b) Do, Re, Mi, Fa, Sol, La이므로 □ 안에 알맞은 문자는 L이다.

[문제 3-34] Q, R ,T

풀이

연속된 5개의 문자 중에서 4번째와 5번째 문자를 서로 바꾸어 나열한 것이므로 □ 안에 알맞은 알파벳은 각각 Q R T이다.

[문제 3-35] (a) 3, 17 (b) 4, 8

풀이

(a) $a:b$라 할 때, a는 3배씩, b는 10씩 커지는 규칙이므로 □ : □=3:17이다.

(b) $a:b$라 할 때, a와 b는 모두 반씩 줄어드는 규칙이므로 □ : □=4:8이다.

[문제 3-36] (a) 73 (b) 95

풀이

(a) 앞 항의 일의 자리에 2를 곱하여 더하는 규칙이므로 □ 안에 알맞은 수는 $71+1\times2=73$이다.

(b) 16+88을 180° 회전하면 88+91=179가 되므로 98+60을 180° 회전하면 09+86=95이다.

따라서 □ 안에 알맞은 수는 95이다.

[문제 3-37] 52, 94, 18

풀이

각 수의 제곱수의 일의 자리와 십의 자리를 맞바꾸어 놓은 것이므로 다음과 같다.

4	5	6	7	8	9
61	52	63	94	46	18

[문제 3-38] ⑤

풀이

① A×4가 한 자리 수이므로 A는 1 또는 2이다. 그런데 E×4는 짝수이므로 A=2이다.

```
  2 B C D E
×         4
―――――――――
  E D C B 2
```

② 4를 곱해 일의 자리 수가 2로 끝나는 수는 3과 8이므로 E는 3 또는 8이다. 그런데 곱셈 결과의 만의 자리의 숫자인 E가 8 이상이어야 하므로 E=8이다.

```
  2 B C D 8
×         4
―――――――――
  8 D C B 2
```

③ $8 \times 4 = 32$이므로 3이 윗자리의 D로 올라간다. 한편 B×4에서 앞자리의 E가 8이므로 B는 1 또는 2인데, A=2이므로 B=1이다.

```
  2 1 C D 8
×         4
─────────
  8 D C 1 2
```

④ 4를 곱하고 3을 더하면 1로 끝나는 수는 일의 자리가 8이 되는 2와 7인데 A=2이므로 D=7이다.

```
  2 1 C 7 8
×         4
─────────
  8 7 C 1 2
```

⑤ 윗자리의 B는 올라온 3을 더하지 않으면 7이 되지 않으므로 C 역시 아랫자리에서 올라온 3을 더해 30 이상으로 되는 7, 8, 9 중 하나이다. 그런데 D=7, E=8이므로 C=9이다.

```
  2 1 9 7 8
×         4
─────────
  8 7 9 1 2
```

①~⑤에 의해 A는 2, B는 1, C는 9, D는 7, E는 8이다.

[문제 3-39] ①

풀이

```
  9 1 0 8
- 1 0 8 9
───────
  8 0 1 9
```

[문제 3-40] (a) 10 (b) 40

풀이

(a) 원의 중심을 기준으로 마주 보는 두 수의 차가 5이므로 빈칸에 알맞은 수는 10이다.

(b) (1+2)×2=6, (3+4)×2=14이므로 빈칸에 알맞은 수는 $(6+14) \times 2 = 40$

[문제 3-41] (a) 82 (b) 6

풀이

(a) 두 수를 곱한 후에 10을 더하면 $4 \times 3 + 10 = 22$, $5 \times 7 + 10 = 45$이므로 $9 \times 8 + 10 = 82$

(b) 두 수를 곱하면 $6 \times 3 = 18$, $9 \times 7 = 63$이다. 따라서 $? \times 8 = 48$에서 ?=6

[문제 3-42] 17

풀이

손의 합에서 발의 합을 빼면 (9+11)-(3+5)=12

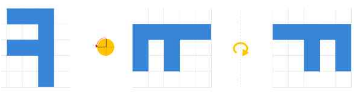
따라서 (15+13)-(7+4)=28-11=17

[문제 3-43] 두 결과는 서로 다르다.

풀이

①을 먼저하고 ②를 한 결과

②를 먼저하고 ①을 한 결과



따라서 두 결과는 서로 다르다.

[문제 3-44] ③

풀이

먼저 를 위로 뒤집으면 이다. 을 시계 방향으로 90˚ 돌리면 이고 다시 90˚를 더 돌리면 이다.

[문제 3-45] ④

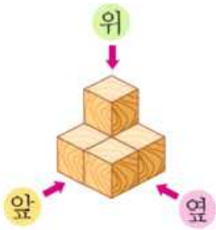
풀이

①번 자리는 3층까지 있으므로 3개, ②번과 ④번 자리는 각각 2층까지 있으므로 2개, ③번과 ⑤번 자리는 각각 1층까지 있으므로 1개이다. 따라서 쌓기나무는 모두 $3+(2\times2)+(1\times2)=9$(개)이다.

[문제 3-46] 풀이 참조

풀이

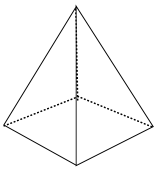
위, 앞, 옆에서 본 모양을 바탕으로 상자를 쌓으면 다음과 같다.



[문제 3-47] 풀이 참조

풀이

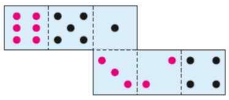
사각뿔에서 보이는 앞면, 옆면, 모서리를 그리고 보이지 않는 모서리는 점선으로 그린다.



[문제 3-48] 풀이 참조

풀이

전개도를 접었을 때 만나는 모서리가 없는 두 면의 점의 수의 합이 7이 되도록 점을 그린다.

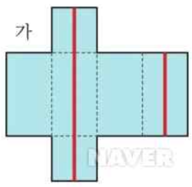


[문제 3-49] ④

풀이

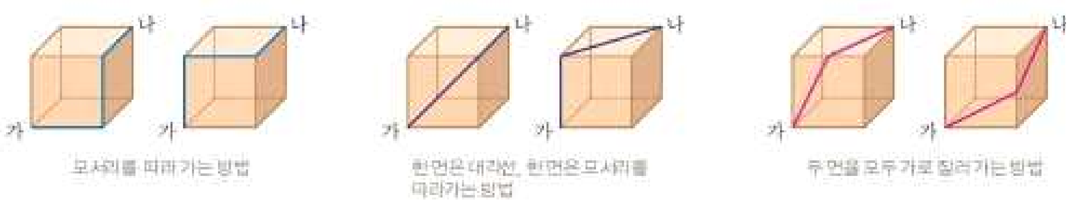
가 : 색 테이프는 직육면체의 두 밑면과 옆면 중 서로 마주 보는 면에 붙어 있고 연결되어 있으므로, 전개도 '가'에서는 주어진 색 테이프를 밑면에 연장해서 붙여 주면 된다. 또한 옆면에서는 마주 보는 면에 색 테이프가 붙어 있으므로 색 테이프가 붙어 있는 면과 마주 보는 면에 색 테이프를 붙여 주면 된다. 따라서 오른쪽 그림과 같다.

가



[문제 3-50] ④

<u>풀이</u>



전개도에서의 꼭짓점 나는 꼭짓점 가에서 2개의 면을 지나는 대각선 방향에 위치한다. 꼭짓점 가를 출발해서 꼭짓점 나까지 가는 3가지 경우를 전개도에 나타내어 보면, 두 면의 대각선을 가로질러 가는 빨간색 길의 길이가 가장 짧다.