2장 학습 정리

2.1 집합

2.1.1 집합이란?

(1) 집합 : 주어진 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임
(2) 원소 : 집합을 이루는 대상 하나하나

2.1.2 집합을 나타내는 방법

(1) 원소나열법 : 모든 원소를 { } 안에 나열하여 집합을 나타내는 방법
(2) 조건제시법 : 집합에 속하는 모든 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 집합을 나타내는 방법
(3) 벤 다이어그램 : 집합을 나타내는 그림
(4) 유한집합 : 원소가 유한개인 집합
(5) 무한집합 : 원소가 무수히 많은 집합
(6) 공집합 : 원소가 하나도 없는 집합

2.1.3 집합 사이의 관계

(1) 부분집합 : 두 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B에 속할 때, A를 B의 **부분집합**이라고 하며, 기호로 $A \subset B$와 같이 나타낸다. 한편 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아닐 때, 이를 기호로 $A \not\subset B$와 같이 나타낸다.
(2) 서로 같다 : 두 집합 A, B의 원소가 모두 같을 때, '두 집합 A, B는 **서로 같다**'고 하며, 이것을 기호로 $A = B$와 같이 나타낸다. 한편 두 집합 A, B가 서로 같지 않을 때, 이를 기호로 $A \neq B$와 같이 나타낸다.
(3) 진부분집합 : 두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이고 $A \neq B$일 때, 집합 A를 집합 B의 **진부분집합**이라고 한다.
(4) 합집합 : 두 집합 A, B에 대하여 A에 속하거나 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **합집합**이라고 하며, 이를 기호로 $A \cup B$와 같이 나타낸다.
(5) 교집합 : 두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고, B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **교집합**이라고 하며, 이를 기호로 $A \cap B$와 같이 나타낸다.
(6) 서로소 : $A \cap B = \varnothing$일 때, A와 B는 **서로소**라고 한다.
(7) 전체집합 : 어떤 집합에 대하여 그 부분집합을 생각할 때, 처음의 집합을 **전체집합**이라 하고, 보통 U로 나타낸다.
(8) 여집합 : 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 U에 대한 A의 **여집합**이라고 하며, 이를 기호로 A^{C}과 같이 나타낸다.
(9) 차집합 : 두 집합 A, B에 대하여 A에 속하지만 B에 속하지 않는 원소로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 **차집합**이라고 하며, 이를 기호로 $A - B$와 같이 나타낸다.

여집합과 차집합의 성질
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
❶ $U^{C}=\varnothing$, $\varnothing^{C}=U$ ❷ $(A^{C})^{C}=A$
❸ $A\cup A^{C}=U$, $A\cap A^{C}=\varnothing$ ❹ $A-B=A\cap B^{C}$

2.1.4 집합의 연산법칙

집합의 연산법칙
세 집합 A, B, C에 대하여
❶ **교환법칙** $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$
❷ **결합법칙** $(A\cup B)\cup C=A\cup (B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C)$
❸ **분배법칙** $A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup (A\cap C)$, $A\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap (A\cup C)$

2.1.5 합집합과 교집합의 원소의 개수
두 유한집합 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

2.1.6 드모르간의 법칙

드모르간의 법칙
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음이 성립한다.
❶ $(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$
❷ $(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$

2.2 명제

2.2.1 명제와 조건
(1) 명제 : 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식
(2) 부정 : 명제가 p에 대하여 'p가 아니다.'를 명제 p의 **부정**이라고 하며, 이를 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다.
(3) 정의 : 용어의 뜻을 명확하게 정한 것을 그 용어의 **정의**라고 한다.
(4) 증명 : 정의, 명제의 가정 또는 이미 옳다고 밝혀진 성질을 이용하여 어떤 명제가 참임을 설명하는 것을 **증명**이라고 한다.
(5) 정리 : 참임이 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 다른 명제를 증명할 때 이용할 수 있는 것을 **정리**라고 한다.
(6) 가정과 결론 : 명제 'p이면 q이다.'에서 p를 가정, q를 결론이라고 하며, 이를 기호로 $p\rightarrow q$와 같이 나타낸다.

2.2.2 진리집합

전체집합 U의 원소 중에서 조건 p가 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 조건 p의 **진리집합**이라고 한다.

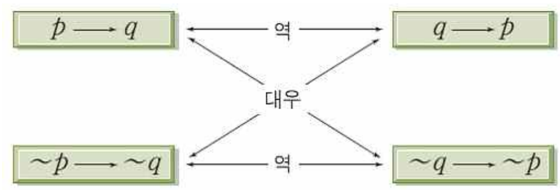
명제와 진리집합
명제 $p \to q$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때
(1) 명제 $p \to q$가 참이면 $P \subset Q$이다.
(2) 명제 $p \to q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이다.

2.2.3 '모든'과 '어떤'이 들어 있는 명제

'모든', '어떤'을 포함하는 명제의 참, 거짓
전체집합 U에서의 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때
(1) $P = U$이면 명제 '모든 x에 대하여 p'는 참이다.
(2) $P \neq U$이면 명제 '모든 x에 대하여 p'는 거짓이다.
(3) $P \neq \varnothing$이면 명제 '어떤 x에 대하여 p'는 참이다.
(4) $P = \varnothing$이면 명제 '어떤 x에 대하여 p'는 거짓이다.

'모든'과 '어떤'의 부정
(1) 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'
(2) 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'

2.2.4 명제의 역과 대우



명제와 그 대우 사이의 관계
명제 $p \to q$의 참, 거짓과 그 대우 $\sim q \to \sim p$의 참, 거짓은 일치한다.

2.2.5 필요조건과 충분조건

(1) 충분조건, 필요조건

명제 $p \to q$가 참일 때, 이것을 기호로

$$p \Rightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때

p는 q이기 위한 **충분조건**,

q는 p이기 위한 **필요조건**

이라고 한다.

(2) 필요충분조건
명제 $p \to q$에 대하여 $p \Rightarrow q$이고 $q \Rightarrow p$일 때, 이것을 기호로

$$p \Leftrightarrow q$$

와 같이 나타내고, 이때

p는 q이기 위한 **필요충분조건**

이라고 한다.

2.3 논리적 추론

2.3.1 명제의 결합자와 진리표

(1) 단순명제 : 문장이나 식 하나로 이루어진 명제 우
(2) 합성명제 : 둘 또는 그 이상의 단순명제들이 결합된 명제

명제의 결합자
① ...가 아니다(not) : $\sim$
② ...이고(and) : $\wedge$
③ ... 또는(or) : $\vee$
④ ...이면...(if ... then...) : $\to$
⑤ ...이면, 그리고 그 때에만...(...if and only if...) : $\leftrightarrow$

(3) 논리곱 : 두 명제 p와 q가 '...이고'로 연결된 합성명제
(4) 논리합 : 두 명제 p와 q가 '... 또는'으로 연결된 합성명제
(5) 진릿값과 진리표 : 명제에 대하여 참 또는 거짓을 명제의 **진릿값**(truth value)이라 하고, 진릿값을 나타낸 표를 **진리표**(truth table)라고 한다.
(6) 논리적 동치 : 두 합성명제 P, Q가 있어서 P가 참이면 Q도 참이고, P가 거짓이면 Q도 거짓일 때, 두 합성명제 P와 Q는 **논리적 동치**(logically equivalence) 또는 간단히 **동치**(equivalence)라 하고 $P \equiv Q$로 나타낸다.

2.3.2 특별한 명제

(1) 조건문 : 두 명제 p와 q에 대하여 'p이면 q이다.'를 **조건문**(conditional statement)이라 하고 기호 $p \to q$로 나타낸다.
(2) 쌍조건문 : 두 명제 p와 q에 대하여 'p이면 q이고, q이면 p이다.'를 **쌍조건문**(biconditional statement)이라 하고 기호 $p \leftrightarrow q$로 나타낸다.
(3) 항진명제 : 명제의 진릿값이 항상 참인 명제
(4) 모순명제 : 명제의 진릿값이 항상 거짓인 명제
(5) 전칭기호와 전칭명제 : '$\forall x$'는 '모든 x'를 의미하는 것으로 $\forall$를 **전칭기호**(universal quantifier)라 하고, 전치기호를 포함한 명제를 **전칭명제**라고 한다.
(6) 특칭기호와 특칭명제 : '$\exists x$'는 '어떤 x'를 의미하는 것으로 $\exists$를 **존재기호**(existential quantifier) 또는 **특칭기호**라 하고, 특칭기호를 포함하는 명제를 **특칭명제**라고 한다.

2.3.3 연역적 추론

연역적 추론 법칙	
임의의 두 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.	
합의 법칙	$p \Rightarrow p \vee q$
단순화 법칙	$p \wedge q \Rightarrow p$, $p \wedge q \Rightarrow q$
교환법칙	$p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$
결합법칙	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
분배법칙	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
추이법칙	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$
멱등법칙	$p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$
삼단긍정법칙	$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
삼단부정법칙	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$
드모르간의 법칙	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$, $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
이중 부정의 법칙	$\sim(\sim p) \equiv p$

2.4 함수

2.4.1 대응과 함수

(1) 대응 : 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지은 것을 집합 X에서 집합 Y로의 **대응**이라고 하고, 기호로 $x \rightarrow y$와 같이 나타낸다.

(2) 함수 : 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 **함수**라고 하며, 이를 기호로 $f : X \rightarrow Y$와 같이 나타낸다.

(3) 정의역과 공역 : 함수 $f : X \rightarrow Y$에 대하여 집합 X를 함수 f의 **정의역**, 집합 Y를 함수 f의 **공역**이라고 한다.

(4) 함숫값과 치역 : 함수 f에 의하여 정의역 X의 각 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때, 이것을 기호로 $y = f(x)$와 같이 나타내고, $f(x)$를 함수 f에 의한 x의 **함숫값**이라고 한다. 그리고 함수
f의 함숫값 전체로 이루어진 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의 **치역**이라고 한다.

(5) 함수의 상등 : 두 함수 $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$에서 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) = g(x)$일 때, 두 함수 f와 g는 서로 같다고 하며, 이를 기호로 $f = g$와 같이 나타낸다. 두 함수 f, g가 서
로 같지 않을 때, $f \neq g$와 같이 나타낸다.

(6) 그래프 : 함수 $f : X \rightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x, f(x))$ 전체의 집합 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$를 함수 f의 **그래프**라고 한다.

2.4.2 여러 가지 함수

(1) 일대일함수 : 함수 $f : X \rightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립할 때, 이 함수 f를 **일대일함수**라고 한다.

(2) 일대일 대응 : 함수 $f : X \rightarrow Y$가 일대일함수이고 치역과 공역이 같을 때, 이 함수 f를 **일**

대일 대응이라고 한다. 함수 $f\ :\ X\rightarrow\ Y$에서 일대일 대응인 함수 f는 다음 두 조건을 모두 만족한다.

일대일대응
(1) 정의역 X의 임의의 두 원소x_1, x_2에 대하여
$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
(2) 치역과 공역이 같다.

(3) 항등함수 : 함수 $f: X \rightarrow Y$에서 정의역 X의 각 원소 x에 그 자신인 x가 대응할 때, 즉 $f(x)=x$일 때, 이 함수 f를 집합 X에서의 **항등함수**라고 한다.

(4) 상수함수 : 함수 $g: X \rightarrow Y$에서 정의역 x의 모든 원소 x에 공역 Y의 단 하나의 원소 c가 대응할 때, 즉 $g(x)=c$일 때, 이 함수 g를 **상수함수**라고 한다.

2.4.3 합성함수와 역함수

합성함수
두 함수 $f: X \rightarrow Z$, $g: Z \rightarrow Y$의 합성함수는
$g \circ f: X \rightarrow Y$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

역함수와 그 성질
함수 $f: X \rightarrow Y$가 일대일 대응일 때,
❶ f의 역함수 $f^{-1}: Y \rightarrow X$가 존재한다.
❷ $y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$
❸ $(f^{-1} \circ f)(x) = x(x \in X)$, $(f \circ f^{-1})(y) = y(y \in Y)$

함수와 그 역함수의 그래프
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

2.4.4 함수의 활용

함수를 활용한 문제 해결 단계	
❶ 변수 정하기	변하는 두 양을 x, y로 정한다.
❷ 함수 구하기	두 변수 x, y 사이의 관계를 $y=f(x)$로 나타낸다.
❸ 답 구하기	함수식이나 그래프 등을 이용하여 문제를 푸는 데 필요한 함숫값을 구한다.
❹ 확인하기	구한 답이 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.