4장 학습 정리

4.1 경우의 수

4.1.1 경우의 수

(1) 사건 : 어떤 실험이나 관찰에 의하여 일어나는 결과
(2) 경우의 수 : 사건이 일어나는 가짓수

4.1.2 합의 법칙

합의 법칙
(1) 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고 A와 B가 동시에 일어나는 경우가 없을 때, 사건 A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.
(2) 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수가 k일 때, 사건 A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n-k$이다.

4.1.3 곱의 법칙

곱의 법칙
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

4.1.4 복원추출과 비복원추출

복원추출과 비복원추출
복원추출은 서로 다른 n개에서 r개를 택할 때 1개를 택한 후 다시 집어넣고 다음 것을 선택하는 경우이고, 비복원추출은 선택했던 것을 다시 집어넣지 않고 남아 있는 것에서 선택하는 경우이다.

4.2 순열

4.2.1 순열

순열
서로 다른 n개에서 $r(0 \le r \le n)$ 개를 택하여 순서대로 나열하는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 **순열(permutation)**이라고 하며, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_\mathrm{r}$와 같이 나타낸다.

순열의 수 (1)
서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 다음과 같다.

$${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n)$$

순열의 수 (2)

(1) $_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0 \le r \le n$)

(2) $_n\mathrm{P}_n = n!$, $0! = 1$, $_n\mathrm{P}_0 = 1$

4.2.2 원순열

원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{_n\mathrm{P}_n}{n} = (n-1)!$$

4.2.4 중복순열

중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는 다음과 같다.

$$_n\Pi_r = n^r$$

4.2.5 같은 것이 있는 순열

같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 다음과 같다.

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

4.3 조합

4.3.1 조합

조합

서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수를 기호로

$$_n\mathrm{C}_r \text{ 또는 } \binom{n}{r} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n)$$

와 같이 나타낸다.

조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 다음과 같다.

$$_n\mathrm{C}_r = \frac{_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n)$$

4.3.2 조합의 성질

조합의 수의 성질

❶ $0 \le r \le n$일 때, ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$

❷ $1 \le r < n$일 때, ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

4.3.3 중복조합

중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 뽑는 중복조합의 수는 다음과 같다.

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

4.4 이항정리

4.4.1 이항정리

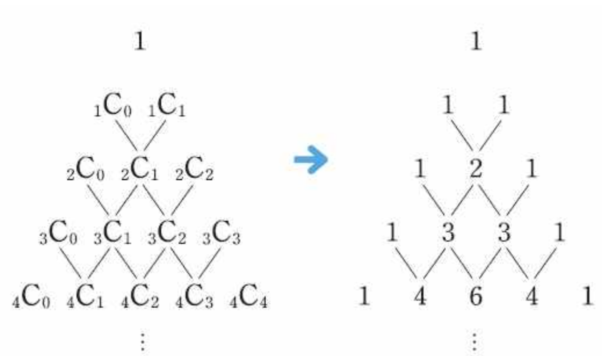
이항정리

n이 자연수일 때,

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$$

4.4.2 파스칼의 삼각형



4.5 확률

4.5.1 확률

확률: 어떤 실험이나 관찰에서 일어나는 모든 경우의 수가 n이고 각 경우가 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 a이면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어나는 모든 경우의 수})} = \frac{a}{n}$$

4.5.2 수학적 확률, 통계적 확률

(1) 수학적 확률: 표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 결과가 일어날 가능성이 모두 같은 정도

로 기대될 때, 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$로 정의하고, 이를 표본공간 S에서 사건 A가 일어날 **수학적 확률**이라고 한다.

(2) 통계적 확률: 같은 시행을 n번 반복할 때 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라고 하자. 시행 횟수 n이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\dfrac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워질 때, 이 값 p를 사건 A의 **통계적 확률**이라고 한다.

4.5.3 배반사건과 여사건

표본공간 S의 두 사건 A와 B에 대하여
합사건: A 또는 B가 일어나는 사건 $A \cup B$를 합사건이라고 한다.
곱사건: A와 B가 동시에 일어나는 사건 $A \cap B$를 곱사건이라고 한다.
배반사건: 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉 $A \cap B = \varnothing$이면 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이라고 한다.
여사건: 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건 A^C를 사건 A의 여사건이라고 한다.

4.5.4 확률의 기본성질

확률의 기본 성질
표본공간 S에서
❶ 임의의 사건 A에 대하여 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$
❷ 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S) = 1$
❸ 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$

확률의 덧셈정리
표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

특히 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

4.5.5 여사건의 확률

여사건의 확률
사건 A의 여사건 A^C에 대하여 A^C의 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$$

4.6 조건부확률

4.6.1 조건부확률

조건부확률
사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) > 0)$$

4.6.2 확률의 곱셈정리

확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)\end{aligned}$$

4.6.3 사건의 독립과 종속

두 사건이 독립일 조건

두 사건 A와 B가 서로 독립일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

4.6.4 독립시행의 확률

독립시행의 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은 다음과 같다.

$${}_n\mathrm{C}_r\, p^r(1-p)^{n-r}\ (\text{단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$