Section 6.1 연습문제

1.

풀이 $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{4}{3},\ a_3 = \dfrac{3}{2},\ a_4 = \dfrac{8}{5},\ a_5 = \dfrac{5}{3}$

3.

풀이 $a_1 = -1,\ a_2 = \dfrac{1}{2},\ a_3 = -\dfrac{1}{6},\ a_4 = \dfrac{1}{24},\ a_5 = -\dfrac{1}{120}$

5.

풀이 $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$

7.

풀이 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

9.

풀이 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1/n)}{2+(1/n)} = \frac{1}{2}$

11.

풀이 $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n^2} = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$이므로 양의 부호와 음의 부호를 교대로 가지면서 0으로 수렴한다. 즉 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2} = 0$이다.

13.

풀이 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1} = 2$이므로 주어진 수열은 양의 부호와 음의 부호를 교대로 가지면서 2와 -2으로 발산한다.

15.

풀이 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\pi}{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{3-(1/n)}=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{n\pi}{3n-1}=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

17.

풀이 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(3x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{3/(3x+1)}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x}=\dfrac{1}{3}\cdot 3=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(3n+1)}=1$$

19.

풀이 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(3x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{3/(3x+1)}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x}=\dfrac{1}{3}\cdot 3=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(3n+1)}=1$$

21.

풀이 (a) 투자원금 1,000만원을 4년간 투자하여 144만원의 이자수익이 발생했으므로 총이자 수익은 $1000\cdot i\cdot 4=144$이다. 그러므로 $i=\dfrac{144}{4000}=0.036$, 따라서 단리이율은 3.6%이다.

(b) 투자원금 1,000만원을 t기간 동안 투자하여 399만원의 이자수익이 발생했으므로 총이자 수익은 $1000\cdot(0.042)\cdot t=399$이다. 따라서 투자기간은 $t=\dfrac{399}{1000\cdot(0.042)}=9.5$, 즉 투자기간은 9년 6개월이다.

23.

풀이 (a) $n-1$번째 달의 물고기 수 p_{n-1}에 대하여 매월 10%로 증가하고 500마리를 판매하므로 n번째 달의 물고기 수는 $p_n=1.1P_{n-1}-500$, $p_0=10000$이다.

(b) $p_1=10500$, $p_2=11050$, $p_3=11655$, $p_4=12321$, $p_5=13052$, $p_4=13858$

Section 6.2 연습문제

1.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}+(-1)^n\frac{1}{3^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ 이므로 첫 번째 무한급수는 초항 $\frac{1}{2}$, 공비 $\frac{1}{2}$인 무한등비급수이므로 합은 $\frac{1/2}{1-(1/2)}=1$이다. 또한 두 번째 급수는 초항 $-\frac{1}{3}$, 공비 $-\frac{1}{3}$인 무한등비급수이므로 그 합은 $\frac{-1/3}{1-(-1/3)}=-\frac{1}{4}$이다. 따라서 구하고자 하는 무한급수의 합은 $3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$이다.

3.

풀이 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+2n+2^n}{n(n+1)2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 이므로

첫 번째 급수는 $\frac{1}{1-(1/2)}=2$로 수렴하고, 두 번째 급수는 부분합열을 이용하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

이다. 따라서 주어진 급수의 합은 3이다.

5.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1(\neq 0)$이므로 일반항 극한 판정법에 의하여 발산한다.

7.

풀이 $\int_1^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}u|_1^x=\lim_{x\to\infty}(\tan^{-1}x-\tan^{-1}1)=\frac{\pi}{4}$이므로 적분판정법에 의하여 주어진 급수는 수렴한다.

9.

풀이 $p=\frac{2}{3}<1$이므로 p-급수 판정법에 의하여 주어진 급수는 발산한다.

11.

풀이 조화급수이므로 발산한다.

13.

풀이 $\frac{1}{n^4+1} < \frac{1}{n^4}$이고 p-급수 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$이 수렴하므로 비교판정법에 의하여 주어진 급수는 수렴한다.

15.

풀이 $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$이라 하면, $\lim_{x \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/(2^n - 1)}{2^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1-(1/2^n)} = 1$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$이 수렴하므로 극한비교 판정법에 의하여 주어진 급수는 수렴한다.

17.

풀이

$a_n = \frac{n^2}{2^n}$이라 하면, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$이고

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x \to \infty} \frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n} = \frac{1}{2} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

이므로 비판정법에 의하여 주어진 급수는 수렴한다.

19.

풀이 $0 \le \frac{\pi^{1/n}}{n^3} \le \frac{\pi}{n^3} = \pi \frac{1}{n^3}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$는 $p=3$인 p-급수이므로 수렴한다. 따라서 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\pi^{1/n}}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{1/n}}{n^3}$은 수렴한다. 그러므로 주어진 급수는 절대수렴한다.

21.

풀이 $p>0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $0<\frac{1}{(n+1)^p}<\frac{1}{n^p}$이므로 감소한다. 그리고 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$이므로 교대급수 판정법에 의하여 $\sum\frac{(-1)^n}{n^p}$는 수렴한다. 한편 $p\le 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$은 존재하지 않는다. 그러므로 일반항 극한판정법에 의하여 $\sum\frac{(-1)^n}{n^p}$은 발산한다. 따라서 주어진 급수가 수렴하기 위한 필요충분조건은 $p>0$이다.

23.

풀이 주어진 급수는 다음과 같이 초항 p, 공비 $p(1-p)$인 무한등비급수이다. 따라서 이 급수의 합은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
p+p^2(1-p)+p^3(1-p)^2+p^4(1-p)^3+\cdots &= p[1+p(1-p)+p^2(1-p)^2+p^3(1-p)^3+\cdots] \\
&= p\frac{1}{1-p(1-p)}=\frac{p}{p^2-p+1}
\end{aligned}
$$

이제 $f(p)=\frac{p}{p^2-p+1}$라 하면 $f'(p)=\frac{1-p^2}{(p^2-p+1)^2}$이고 p가 확률이므로 $0\le p\le 1$이다. 따라서 $f'(x)\ge 0$이므로 $f(p)$는 단조증가함수이고, 따라서 $p=1$일 때 최댓값 $f(1)=1$을 갖는다.

Section 6.3 연습문제

1.

풀이 $\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-(-x/2)}=\frac{1}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^{n+1}}x^{n}$

3.

풀이 $\frac{1+x}{1-x}=-1+\frac{2}{1-x}$ 이므로

$$\frac{1+x}{1-x}=-1+\frac{2}{1-x}=-1+2\left(1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+\cdots\right)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}$$

5.

풀이 [예제 6-26(b)]에서 $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n}$을 구했으며, x 대신에 x^{2}을 대입하면 $\ln(1-x^{2})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x^{2})^{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$이다.

7.

풀이 $a_{n}=(-1)^{n}\left(\frac{x}{3}\right)^{n}$이라 하면, $a_{n+1}=(-1)^{n+1}\left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}$ 이므로

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}/3^{n+1}}{(-1)^{n}x^{n}/3^{n}}\right|=\frac{|x|}{3}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{3}=\frac{|x|}{3}$$

이다. 그러므로 주어진 무한급수는 $\frac{|x|}{3}<1$ 즉, $|x|<3$이면 수렴하고, $|x|>3$이면 발산한

다. $|x|=3$이면 $x=-3$ 또는 $x=3$이다. $x=-3$이면 $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1+1+1+\cdots = \infty$이므로 발산한다. $x=3$이면, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$은 0과 1에서 진동하므로 수렴하지 않는다. 따라서 수렴구간은 $|x|<3$, 즉 $-3<x<3$이다.

9.

풀이 $a_n=(-1)^n 2^n x^{2n+1}$이라 하면, $a_{n+1}=(-1)^{n+1}2^{n+1}x^{2n+3}$이므로

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}x^{2n+3}}{(-1)^n 2^n x^{2n+1}}\right| = 2|x|^2$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} 2|x| = 2|x|$$

이다. 그러므로 주어진 무한급수는 $2|x|^2<1$ 즉, $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$이면 수렴하고, $|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}$이면 발산한다. $|x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$이면 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$이면 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}$이므로 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$와 0 사이에서 진동한다. $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$이면, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$은 0과 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 사이에서 진동하므로 수렴하지 않는다. 따라서 수렴구간은 $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, 즉 $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

11.

풀이 $a_n = (-1)^n \dfrac{x^n}{n(n+1)}$이라 하면, $a_{n+1} = (-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$이므로

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}/(n+1)(n+2)}{(-1)^n x^n / n(n+1)}\right| = |x|\frac{n}{n+2}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = |x|$$

이다. 그러므로 주어진 무한급수는 $|x|<1$이면 수렴하고, $|x|>1$이면 발산한다. $|x|=1$이면 $x=-1$ 또는 $x=1$이다. $x=-1$이면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1$이므로 수렴한다. $x=1$이면, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$은 교대급수 판정법에 의하여 수렴한다. 따라서 수렴구간은 $-1 \le x \le 1$이다.

13.

풀이 $a_n = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$이라 하면, $a_{n+1} = (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$이므로

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}/(2n+2)!}{(-1)^n x^{2n}/(2n)!}\right| = |x|^2\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = |x|^2$$

이다. 그러므로 주어진 무한급수는 $|x|^2<1$, 즉 $|x|<1$이면 수렴하고, $|x|>1$이면 발산한다. $|x|=1$이면 $x=-1$ 또는 $x=1$이다. $x=-1$이면 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$은 교대급수 판정법에 의하여 수렴한다. $x=1$이면, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$은 교대급수 판정법에 의하여 수렴한다. 따라서 수렴구간은 $-1 \le x \le 1$이다.

15.

풀이 $a_n = \frac{2^n e^6}{n!}(x-3)^n$이라 하면, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}e^6}{(n+1)!}(x-3)^{n+1}$이므로

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1}e^6(x-3)^{n+1}/(n+1)!}{2^n e^6(x-3)^n/n!}\right| = |x-3|\frac{2}{n+1}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = |x-3|\cdot 0 = 0 < 1$$

이다. 그러므로 모든 실수에서 수렴한다.

17.

풀이 $\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}[(-1)^n x^n] = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$

19.

풀이 $\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}[(n+1)x^{2n-1}] = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(2n-1)x^{2n-2}$

21.

풀이 $\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

23.

풀이 $\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-3)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\frac{1}{n!}(x-3)^n dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-3)^{n+1}$

Section 6.4 연습문제

1.

풀이 $\dfrac{x^2+1}{1+x}=x-1+\dfrac{2}{1+x}$ 이고 $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+-\ \cdots$

$$\frac{x^2+1}{1+x}=x-1+\frac{2}{1+x}=x-1+2\left(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5\pm\ \cdots\ \right)=1-x+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^n$$

3.

풀이 $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\ \cdots\ +\dfrac{1}{n!}x^n+\ \cdots$ 이므로

$$e^{-x}=1+(-x)+\frac{1}{2!}(-x)^2+\frac{1}{3!}(-x)^3+\ \cdots\ +\frac{1}{n!}(-x)^n+\ \cdots$$

$$=1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\ \cdots\ +(-1)^n\frac{1}{n!}x^n+\ \cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

5.

풀이 $\ln(1-x)=-\left(x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+\ \cdots\ +\dfrac{1}{n}x^n+\ \cdots\ \right)$ 이므로

$$\ln(1-x^2)=-\left(x^2+\frac{1}{2}(x^2)^2+\frac{1}{3}(x^2)^3+\ \cdots\ +\frac{1}{n}(x^2)^n+\ \cdots\ \right)$$

$$=-\left(x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6+\ \cdots\ +\frac{1}{n}x^{2n}+\ \cdots\ \right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$$

7.

풀이 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이고, $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $e^{-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ 이므로

$$\sinh x=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}-(-1)^n\frac{1}{n!}\right)x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

9.

풀이 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ 이므로

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

11.

풀이 6.2절의 [연습문제 6]에 의하여

$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$ 이므로

$$\begin{aligned}\tan^{-1} 2x &= 2x - \frac{(2x)^3}{3} + \frac{(2x)^5}{5} - \frac{(2x)^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}\end{aligned}$$

13.

풀이

$f(x) = x^{-1}$	$f(2) = \frac{1}{2}$	$f'(x) = -x^{-2}$	$f'(2) = -\frac{1}{2^2}$
$f''(x) = 2!x^{-3}$	$f''(2) = \frac{2!}{2^3}$	$f'''(x) = -3!x^{-4}$	$f'''(2) = -\frac{3!}{2^4}$
$\cdots$	$\cdots$	$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$	$f^{(n)}(2) = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned}f(x) &= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} - + \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots\end{aligned}$$

15.

풀이 $f(x)=\sin x$ $f(\pi/2)=1$ $f'(x)=\cos x$ $f'(\pi/2)=0$

$f''(x)=-\sin x$ $f''(\pi/2)=-1$ $f'''(x)=-\cos x$ $f'''(\pi/2)=0$

$f^{(4)}(x)=\sin x$ $f^{(4)}(\pi/2)=1$ $f^{(5)}(x)=\cos x$ $f^{(5)}(\pi/2)=0$

$f^{(6)}(x)=-\sin x$ $f^{(6)}(\pi/2)=-1$ $f^{(7)}(x)=-\cos x$ $f^{(7)}(\pi/2)=0$

$$f(x)=f(\pi/2)+f'(1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{f''(\pi/2)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\pi/2)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{1}{6!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6+\frac{1}{8!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^8-+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

17.

풀이 $f(x)=e^x$ $f(1)=e$ $f'(x)=e^x$ $f'(1)=e$

$f''(x)=e^x$ $f''(1)=e$ $f'''(x)=e^x$ $f'''(1)=e$

$\cdots$ $\cdots$ $f^{(n)}(x)=e^x$ $f^{(n)}(1)=e$

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\cdots$$

$$=e+e(x-1)-\frac{e(x-1)^2}{2!}+\frac{e(x-1)^3}{3!}-+\cdots+\frac{e(x-1)^n}{n!}+\cdots$$

$$=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$$

19.

풀이 $\frac{1}{1+x^4}=1-(x^4)+(x^4)^2-(x^4)^3+\cdots+(-1)^n(x^4)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}$ 이므로

$$\int\frac{1}{1+x^4}dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^{4n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}$$

21.

풀이 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 이므로

$$\int \sin x^2\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(4n+3)} x^{4n+3}$$

23.

풀이 $f(x) = (1+x)^p$ 이라 하면,

$f(x) = (1+x)^p,\quad f(0) = 1,\quad f'(x) = p(1+x)^{p-1},\quad f'(0) = p$
$f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2},\quad f''(0) = p(p-1)$
$f'''(x) = p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3},\quad f'''(0) = p(p-1)(p-2)$
등등

$f^{(n)}(x) = p(p-1)\cdots(p-n+1)(1+x)^{p-n},\quad f^{(n)}(0) = p(p-1)\cdots(p-n+1)$

이므로 $(1+x)^p$ 의 매클로린급수는

$$f(x) = (1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n$$

이다. 또한 이 급수가 $-1 < x < 1$에서 수렴하는 것을 보이기 위하여 절대비판정법을 사용하면,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{p(p-1)\cdots(p-n+1)(p-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\dfrac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(p-n)}{n+1}\right| = |x|$$

이므로 수렴중심은 $x = 0$이고 수렴구간 $-1 < x < 1$이다.

Section 6.5 연습문제

1.

풀이 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = \frac{1}{\pi}\left(x|_{-\pi}^{\pi}\right) = 2$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\sin nx}{n\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = -\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\cos nx - \cos(-n\pi)}{n\pi} = 0$$

따라서 $f(x) = 1$의 푸리에급수는 $F(x) = \frac{a_0}{2} = 1$이다.

3.

풀이 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi}(-1)\, dx\right) = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \cos nx\, dx - \int_{0}^{\pi} \cos nx\, dx\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin nx\, dx - \int_{0}^{\pi} \sin nx\, dx\right) = \frac{2(-1+\cos n\pi)}{n\pi} = \frac{2(-1+(-1)^n)}{n\pi}$$

따라서 주어진 함수의 푸리에급수는 다음과 같다.

$$F(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{n\pi}\sin nx = -4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)x$$

5.

풀이 $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (1+x)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,dx = 1$

$a_n = \int_{-1}^{0} (1+x)\cos n\pi x\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\cos n\pi x\,dx = \dfrac{2(1-\cos n\pi)}{(n\pi)^2} = \dfrac{2(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}$

$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = 0$

이므로 주어진 함수의 푸리에급수는 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{[(2n-1)\pi]^2} \cos(2n-1)\pi x$$

7.

풀이 $2T = 2$이므로 $T = 1$이고 $f(x) = x^2$은 우함수이므로, 이 함수의 푸리에급수는 코사인급수이다. 한편 코사인급수의 계수는 다음과 같다.

$$a_0 = 2\int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$
$$a_n = 2\int_{0}^{1} x^2 \cos n\pi x\,dx = \frac{4\cos n\pi}{n^2\pi^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

따라서 주어진 함수의 푸리에급수는 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x$$