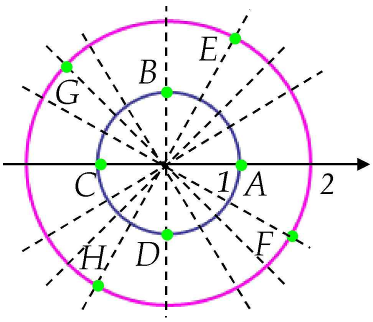
Section 5.1 연습문제

1~8.

풀이



9~16

풀이 9번 - 13번

10번 - 15번

11번 - 14번

12번 - 16번

17.

풀이 $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{(-1)}{1} = \dfrac{7\pi}{4}$ 이므로 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$이다.

19.

풀이 $r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{(-\sqrt{2})}{(-\sqrt{2})} = \dfrac{5\pi}{4}$ 이므로 $\left(2\sqrt{2},\ \dfrac{5\pi}{4}\right)$이다.

21.

풀이 $x = 2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} = 1$, $y = 2 \cdot \sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이므로 $(1,\ \sqrt{3})$이다.

23.

풀이 $x = 2 \cdot \cos\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, $y = 2 \cdot \sin\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ 이므로 $(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$이다.

Section 5.2 연습문제

1.

풀이 $\tan\theta = \tan\frac{2\pi}{3} =-\sqrt{3} = \frac{y}{x}$이므로 $y=-\sqrt{3}\,x$

3.

풀이 $r\sin\theta = 1$이므로 $y = 1$

5.

풀이 $r = \tan\theta$ 이므로 $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{x}$, 즉 $x\sqrt{x^2+y^2} = y$

7.

풀이 $r^2\sin 2\theta = 2r\sin\theta\, r\cos\theta = 2$이므로 $xy=1$

9.

풀이 $r^2 = r\sin\theta + r\cos\theta$이므로 $x^2+y^2 = x+y$

11.

풀이 $r\cos\theta = 2$

13.

풀이 $r\cos\theta = r\sin\theta$이므로 $\cos\theta = \sin\theta$

15.

풀이 $xy = 2(r\cos\theta)(r\sin\theta) = r^2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta = 2$이므로 $r^2\sin 2\theta = 4$

17.

풀이 $x^2+y^2-4y=0$이므로 $r^2-4r\sin\theta = 0$, $r = 4\sin\theta$

19.

풀이 $\dfrac{r^2\cos^2\theta}{4}+\dfrac{r^2\sin^2\theta}{9}=1$, $r^2(9\cos^2\theta+4\sin^2\theta)=36$, $r^2(4+5\cos^2\theta)=36$

21.

풀이 $r=\sec\theta$는 기선에 대하여 대칭

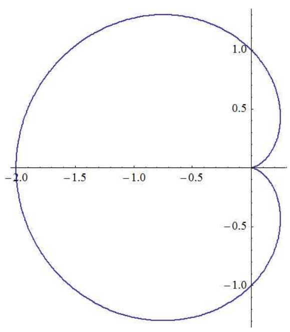
θ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$r=\sec\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞

$x=1$인 직선

23.

풀이 $r=1-\cos\theta$는 기선에 대하여 대칭

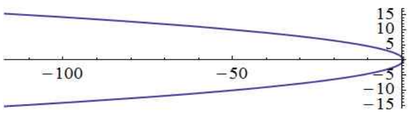
θ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$r=\sec\theta$	1	$1/2$	$1-1/\sqrt{2}$	$1-\sqrt{3}/2$	0	$1-\sqrt{3}/2$	$1-1/\sqrt{2}$	$1/2$	1



25.

풀이 $r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ 는 기선에 대하여 대칭

θ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$r=\sec\theta$	1	$2/3$	$2-\sqrt{2}$	$4-2\sqrt{3}$	$1/2$	$4-2\sqrt{3}$	$2-\sqrt{2}$	$2/3$	1



29.

풀이 $1 = 2\sin\theta$, $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 교점은 $\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

31.

풀이 $1+\cos\theta = 1-\cos\theta$, $\cos\theta = 0$, $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}$ 이고 두 곡선 모두 극을 지나므로 교점은 $\left(1,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, 극 O이다.

33.

풀이 $4 = 4\cos 2\theta$, $\cos 2\theta = 1$, $\theta = 0$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\dfrac{3\pi}{2}$ 이므로 교점은 $(4,\ 0)$, $\left(4,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(4,\ \pi)$, $\left(4,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$이다.

65.

풀이 두 점 $A(r_1, \theta_1)$과 $B(r_2, \theta_2)$에 대한 직교좌표계의 점 $A(x_1, y_1)$과 $B(x_2, y_2)$는 각각 다음과 같이 결정된다.

$$x_1 = r_1 \cos\theta_1,\ y_1 = r_1 \sin\theta_1,\ x_2 = r_2 \cos\theta_2,\ y_2 = r_2 \sin\theta_2$$

그러므로

$$(x_2 - x_1)^2 = (r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1)^2,\ (y_2 - y_1)^2 = (r_2 \sin\theta_2 - r_1 \sin\theta_1)^2$$

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1)^2 + (r_2 \sin\theta_2 - r_1 \sin\theta_1)^2 \\ &= (r_2^2 \cos^2\theta_2 + r_1^2 \cos^2\theta_1 - 2r_1 r_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2) \\ &\quad + (r_2^2 \sin^2\theta_2 + r_1^2 \sin^2\theta_1 - 2r_1 r_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2) \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) \\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

이다. 따라서 두 점 A와 B 사이의 거리는 다음과 같다.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

67.

풀이 $|\theta_1 - \theta_2| = \dfrac{\pi}{2}$이면 $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$이므로 $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ 이다.

69.

풀이 (a) $r=2+\sec\theta=2+\dfrac{1}{\cos\theta}$ 이므로 $r\to\infty$ 이면 $\theta\to\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$ 이고 $r\to-\infty$ 이면 $\theta\to\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^+$ 이다.

$$\lim_{r\to\infty}x=\lim_{\theta\to(\pi/2)^-}(2+\sec\theta)\cos\theta=\lim_{\theta\to(\pi/2)^-}(2\cos\theta+1)=1$$

$$\lim_{r\to-\infty}x=\lim_{\theta\to(\pi/2)^+}(2+\sec\theta)\cos\theta=\lim_{\theta\to(\pi/2)^+}(2\cos\theta+1)=1$$

따라서 $r=2+\sec\theta$는 수직점근선 $x=1$을 갖는다.

(b) $r=2+\mathrm{cosec}\theta=2+\dfrac{1}{\sin\theta}$ 이므로 $r\to\infty$ 이면 $\theta\to\pi^-$ 이고 $r\to-\infty$ 이면 $\theta\to\pi^+$ 이다.

$$\lim_{r\to\infty}y=\lim_{\theta\to\pi^-}(2+\mathrm{cosec}\theta)\sin\theta=\lim_{\theta\to\pi^-}(2\sin\theta+1)=1$$

$$\lim_{r\to-\infty}y=\lim_{\theta\to\pi^+}(2+\mathrm{cosec}\theta)\sin\theta=\lim_{\theta\to\pi^+}(2\sin\theta+1)=1$$

따라서 $r=2+\mathrm{cosec}\theta$는 수직점근선 $y=1$을 갖는다.

Section 5.3 연습문제

1.

풀이 $\theta=\pi/3$인 그래프 위의 점 A는 $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$이고, $\frac{dr}{d\theta}=-4\sin\theta$이므로 곡선 위의 점 A에서 접선의 기울기는 다음과 같다.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{\theta=\pi/3\\ r=2}}=\left.\frac{-4\sin\theta\,\sin\theta+r\cos\theta}{-4\sin\theta\,\cos\theta-r\sin\theta}\right|_{\substack{\theta=\pi/3\\ r=2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

또한 점 A를 직교좌표계로 나타내면

$$x=2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=1,\ y=2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

이므로 구하고자 하는 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

3.

풀이 $\theta=\pi/6$인 그래프 위의 점 A는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6}\right)$이고, $\frac{dr}{d\theta}=-2\sin2\theta$이므로 곡선 위의 점 A에서 접선의 기울기는 다음과 같다.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{\theta=\pi/6\\ r=1/2}}=\left.\frac{-2\sin2\theta\,\sin\theta+r\cos\theta}{-2\sin2\theta\,\cos\theta-r\sin\theta}\right|_{\substack{\theta=\pi/6\\ r=1/2}}=\frac{\sqrt{3}}{7}$$

또한 점 A를 직교좌표계로 나타내면

$$x=\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{4},\ y=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$$

이므로 구하고자 하는 접선의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{3}}{7}x+\frac{1}{7}$이다.

5.

풀이 $\theta=\pi/6$인 그래프 위의 점 A는 $\left(2-\sqrt{3},\ \frac{\pi}{6}\right)$이고, $\frac{dr}{d\theta}=2\sin\theta$이므로 곡선 위의 점 A에서 접선의 기울기는 다음과 같다.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{\theta=\pi/6 \\ r=2-\sqrt{3}}}=\left.\frac{2\sin\theta\sin\theta+r\cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}\right|_{\substack{\theta=\pi/6 \\ r=2-\sqrt{3}}}=1$$

또한 점 A를 직교좌표계로 나타내면

$$x=(2-\sqrt{3})\cdot\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{3-2\sqrt{3}}{2},\quad y=(2-\sqrt{3})\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

이므로 구하고자 하는 접선의 방정식은 $y=x+\frac{5-3\sqrt{3}}{2}$이다.

7.

풀이 $y=(1+\sin\theta)\sin\theta,\ x=(1+\sin\theta)\cos\theta$이므로

수평접선 ; $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta(1+2\sin\theta)=0;\ \theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6};\ \left(2,\ \frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\ \frac{7\pi}{6}\right),\left(\frac{1}{2},\ \frac{11\pi}{6}\right)$

수직접선 : $\frac{dx}{d\theta}=\cos^2\theta-\sin\theta(1+\sin\theta)=-(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0;\ \theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3};$
$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\ \frac{7\pi}{6}\right),\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\ \frac{11\pi}{6}\right)$

9.

풀이 교점의 좌표: $1-\cos 2\theta = 1+\cos\theta$, $-\cos 2\theta = \cos\theta$, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

$r_1 = 1-\cos 2\theta$, $r_2 = 1+\cos\theta$이라 하면,

$$\tan\beta_1 = \frac{r_1}{dr_1/d\theta}\bigg|_{\theta=\pi/3} = \frac{1-\cos 2\theta}{2\sin 2\theta}\bigg|_{\theta=\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\beta_2 = \frac{r_2}{dr_2/d\theta}\bigg|_{\theta=\pi/3} = \frac{1+\cos\theta}{-\sin\theta}\bigg|_{\theta=\pi/3} = -\sqrt{3}$$

$$\tan(\beta_1-\beta_2) = \frac{\sqrt{3}/2-(-\sqrt{3})}{1-(\sqrt{3}/2)(-\sqrt{3})} = -3\sqrt{3}$$

따라서 $\beta_1-\beta_2 = \tan^{-1}|-3\sqrt{3}| = \tan^{-1}|3\sqrt{3}|$이다.

11.

풀이 $r = 1-\sin\theta$은 y축 대칭

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin\theta)^2 d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-2\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\theta + 2\cos\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\,\bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi$$

13.

풀이 $r = \cos 2\theta$은 x축과 y축 대칭

$$S = 8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\cos 2\theta)^2 d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 4\theta}{2}d\theta = 4\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$$

15.

풀이 $r^2 = \cos 2\theta$은 x축과 y축 대칭

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sqrt{\cos 2\theta})^2 d\theta = 2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta = \sin 2\theta\,\Big|_0^{\pi/4} = 1$$

17.

풀이 교점의 θ : $\theta=0,\ \pi$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[(1+\sin\theta)^2-1^2\right]d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(2\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\theta\right)d\theta=\frac{8+\pi}{2}$$

19.

풀이 내부곡선은 $\pi/6\le\theta\le 5\pi/6$에서 나타나므로 내부곡선에 의한 넓이는

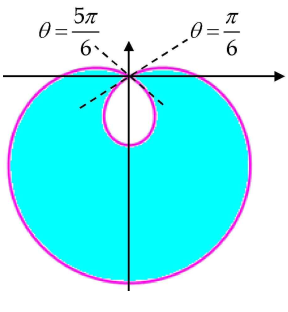
$$S_1=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(1-2\sin\theta)^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(3-4\sin\theta-2\cos 2\theta)\,d\theta=\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

외부곡선은 $5\pi/6\le\theta\le 13\pi/6$에서 나타나므로 내부곡선에 의한 넓이는

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{5\pi/6}^{13\pi/6}(1-2\sin\theta)^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_{5\pi/6}^{13\pi/6}(3-4\sin\theta-2\cos 2\theta)\,d\theta=2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

그러므로 구하고자 하는 넓이는

$$S=S_2-S_1=\left(2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\pi+3\sqrt{3}$$



21.

풀이 교점의 θ : $\theta = \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$

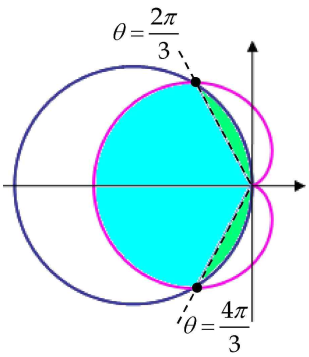
$r = -6\cos\theta$와 $r = 2 - 2\cos\theta$은 기선 대칭

$$S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi/3} (-6\cos\theta)^2 d\theta = 18\int_{2\pi/3}^{\pi} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = 3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi} (2-2\cos\theta)^2 d\theta = 4\int_{2\pi/3}^{\pi} (1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\, d\theta = 2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

그러므로 구하고자 하는 넓이는

$$S = S_1 + S_2 = \left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) + \left(2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) = 5\pi$$



23.

풀이 $r = \theta^2$, $dr/d\theta = 2\theta$이므로 $\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}$ 이다.

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \theta\sqrt{\theta^2+4}\, d\theta \quad (u = \theta^2 + 4)$$

$$= \frac{1}{2}\int_4^{4(1+\pi^2)} u^{1/2} du = \frac{4}{3}u\sqrt{u}\,\Big|_4^{4(1+\pi^2)} = \frac{32}{3}\left[(1+\pi^2)\sqrt{1+\pi^2} - 1\right]$$

25.

풀이 $r^2 = \cos 2\theta$은 $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$에서 정의되고

$$A = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r\cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \sqrt{r^4 + \left(r\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

이다. 한편 $r^2 = \cos 2\theta$로부터

$$r^4 = \cos^2 2\theta,\ 2r\frac{dr}{d\theta} = -2\sin 2\theta,\ \left(r\frac{dr}{d\theta}\right) = \sin^2 2\theta$$

이므로

$$\sqrt{r^4 + \left(r\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} = 1$$

이다. 그러므로 y축을 중심으로 회전한 회전체의 겉넓이는 다음과 같다.

$$A_y = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta = 2\pi \sin\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2\pi\sqrt{2}$$