# Section 9.1 연습문제

1.

풀이 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

3.

풀이 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-2)^2+1^2} = 3\sqrt{2}$

5.

풀이 $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (-1,\ 4,\ 1)$

7.

풀이 $-\mathbf{a}+2\mathbf{b} = (10,\ -7,\ -4)$이므로 $\|-\mathbf{a}+2\mathbf{b}\| = \sqrt{10^2+(-7)^2+(-4)^2} = \sqrt{165}$

9.

풀이 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,\ -3,\ -2)$

11.

풀이 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{26}$, $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}(3,\ -1,\ 4)$

13.

풀이 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \left(1,\ -\dfrac{1}{2},\ 2\right)\cdot\left(-1,\ -2,\ \dfrac{1}{2}\right) = 1$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{21}\right)$

15.

풀이 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)\cdot(3,\ 6,\ -9) = -3$, $\|\mathbf{a}\| = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\|\mathbf{b}\| = 3\sqrt{14}$, $\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{21}}{14}\right)$

17.

풀이 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$는 스칼라이므로 스칼라와 벡터의 내적은 정의되지 않는다.

19.

풀이 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$는 벡터이고 따라서 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\mathbf{c}$은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 외적인 벡터와 벡터 $\mathbf{c}$의 합이다.

21.

풀이 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(1,\ a)\cdot(a,\ 1)=2a,\ \|\mathbf{a}\|=\|\mathbf{b}\|=\sqrt{1+a^2}$,

$2a=\dfrac{1+a^2}{\sqrt{2}}$; $a^2-2\sqrt{2}a+1=0$; $a=\sqrt{2}\pm1$

23.

풀이 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}=(2,\ 6,\ 2)$

25.

풀이 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=(10,\ 1,\ -4)$

27.

풀이 (a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,\ 2,\ -5)$

(b) $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1,\ -2,\ 5)$

(c) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & -2\end{vmatrix}=(-4,\ 0,\ 4)$

(d) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -1 & 0\\ -4 & 1 & -2\end{vmatrix}=(2,\ 4,\ -2)$, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=8$

(e) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & -2\end{vmatrix}=(-8,\ 4,\ 0)$

(f) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -5\\ 2 & 4 & -2\end{vmatrix}=(16,\ -8,\ 0)$

29.

풀이 $\mathrm{a}\cdot(\mathrm{b}\times\mathrm{c})=\begin{vmatrix}4&1&1\\3&-1&2\\3&0&2\end{vmatrix}=-5$이므로 $V=5$

31.

풀이 $P(4,0,3)$, $Q(0,-2,5)$, $R(-1,3,-1)$

$\overrightarrow{PQ}=(-4,-2,2)$, $\overrightarrow{PR}=(-5,3,-4)$;

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\mathrm{i}&\mathrm{j}&\mathrm{k}\\-4&-2&2\\-5&3&-4\end{vmatrix}=(2,-26,-22)$; $\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\|=2\sqrt{291}$; $S=\sqrt{291}$

33.

풀이 $\mathrm{a}=(1,-1,2)$, $\mathrm{b}=(5,-1,3)$

$\mathrm{a}\times\mathrm{b}=\begin{vmatrix}\mathrm{i}&\mathrm{j}&\mathrm{k}\\1&-1&2\\5&-1&3\end{vmatrix}=(-1,7,4)$, $\|\mathrm{a}\times\mathrm{b}\|=\sqrt{66}$

35.

풀이 위치벡터 r와 힘 벡터 F 사이의 각은 $75^\circ$이고, 따라서 두 벡터에 의한 토크의 크기는 다음과 같다.

$$\|\tau\|=\|\mathrm{r}\times\mathrm{F}\|=\|\mathrm{r}\|\cdot\|\mathrm{F}\|\sin 75^\circ=(0.3)\,100\,(0.9659)=28.977(\text{joule})$$

37.

풀이 $\|\mathrm{a}+\mathrm{b}\|^2=(\mathrm{a}+\mathrm{b})\cdot(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\mathrm{a}\cdot\mathrm{a}+\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{a}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{b}$

$=\|\mathrm{a}\|^2+2\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}+\|\mathrm{b}\|^2$

$\|\mathrm{a}-\mathrm{b}\|^2=(\mathrm{a}-\mathrm{b})\cdot(\mathrm{a}-\mathrm{b})=\mathrm{a}\cdot\mathrm{a}-\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}-\mathrm{b}\cdot\mathrm{a}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{b}$

$=\|\mathrm{a}\|^2-2\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}+\|\mathrm{b}\|^2$

이므로 $\|\mathrm{a}+\mathrm{b}\|^2+\|\mathrm{a}-\mathrm{b}\|^2=2(\|\mathrm{a}\|^2+\|\mathrm{b}\|^2)$

# Section 9.2 연습문제

1.

풀이 $a-b=1,\ a+2b=7,\ c-d=0,\ 2c+d=3$이므로 $a=3,\ b=2,\ c=d=1$이다.

3.

풀이 (a) $A+2B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $A-B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

(c) $A^t+B^t=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $A+A^t=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

(e) $A-A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $AB=\begin{pmatrix} -16 & -5 & -9 \\ 5 & 4 & 5 \\ -11 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $(AB)^t=\begin{pmatrix} -16 & 5 & -11 \\ -5 & 4 & -1 \\ -9 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

(g) $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^tB=\begin{pmatrix} -7 & -2 & -4 \\ 15 & 9 & 12 \\ -13 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

(h) $B^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $BB^t=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 13 \\ 0 & 3 & 1 \\ 13 & 1 & 29 \end{pmatrix}$

5.

풀이 $(1\ \ k\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}=2+7k=0;\ k=-\dfrac{2}{7}$

7.

풀이 $A^2=\begin{pmatrix}1&4\\0&9\end{pmatrix}$이므로

$$f(A)=A^2-2A-3I_3=\begin{pmatrix}1&4\\0&9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&2\\0&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

9.

풀이 $A=\begin{pmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\5&6&7&8\end{pmatrix}$

11.

풀이 $A=\begin{pmatrix}-1&-1&1&1\\-1&-1&-1&1\\1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$

13.

풀이

$3\times3$ 행렬 $A$의 열벡터를 $\mathrm{c}_1$, $\mathrm{c}_2$, $\mathrm{c}_3$이라 하면, 임의의 실수 $x$, $y$, $z$에 대하여

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\mathrm{c}_1+y\mathrm{c}_2+z\mathrm{c}_3=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\\0\end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $x=1$, $y=0$, $z=0$이라 하면 $\mathrm{c}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$이고, $x=0$, $y=1$, $z=0$이라 하면 $\mathrm{c}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, 그리고 $x=0$, $y=0$, $z=1$이라 하면 $\mathrm{c}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$이다. 그러므로 주어진 식을 만족하는 $3\times3$ 행렬은 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$이다.

15.

풀이 A, B, C, D가 각각 수학, 물리, 화학 교재를 산 가격을 의미한다.

## Section 9.3 연습문제

1.

풀이 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3

풀이 $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{7}{11} & -\frac{12}{11} \\ -\frac{2}{1} & \frac{3}{1} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

5.

풀이 $$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

7.

풀이 $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0,$ $$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ -\frac{1}{ad} & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

9.

풀이 $a^4 \neq 0$, 즉 $a \neq 0$, $$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^4} \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 & a^3 & 0 & 0 \\ a & -a^2 & a^3 & 0 \\ -1 & a & -a^2 & a^3 \end{pmatrix}$$

11.

풀이 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{148}{29} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{29} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{34}{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13.

풀이 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15.

풀이 확대행렬에 행연산자를 적용하면

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & b_1 \\ 3 & 2 & b_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_2 \end{pmatrix}$$

이므로 적어도 하나의 해를 갖기 위하여 $b_1 - 2b_2 = 0$, 즉 $b_1 = 2b_2$이어야 한다.

17.

풀이 확대행렬에 행연산자를 적용하면

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -2 & 3 & 2 & b_2 \\ -4 & 7 & 4 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & b_2 + 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 - b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

이므로 적어도 하나의 해를 갖기 위하여 $2b_1 - b_2 + b_3 = 0$, 즉 $b_2 = 2b_1 + b_3$이어야 한다.

19.

풀이 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$이므로 $x=3$, $y=-4$, $z=-\frac{8}{3}$, $w=\frac{2}{3}$이다.

21.

풀이 $X=x^2$, $Y=y^2$, $Z=z^2$이라 놓고, $X$, $Y$, $Z$를 먼저 구한다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

이므로 $x^2=1$, $y^2=3$, $z^2=2$이다. 따라서 $x=\pm 1$, $y=\pm\sqrt{3}$, $z=\pm\sqrt{2}$이다.

23

풀이 각 노드에서 $i_1+i_3=i_2$이고 키르히호프 전압법칙에 의하여 왼쪽회로와 오른쪽 회로에서 각각 $4i_1+6i_2=1$, $2i_3=4i_1+2$이므로 연립방정식

$$i_1-i_2+i_3=0,\ 4i_1+6i_2=1,\ 4i_1-2i_3=-2$$

을 얻는다. 확대행렬에 행연산자를 사용하면

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{22} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $i_1=-\frac{5}{22}$, $i_2=\frac{7}{22}$, $i_3=\frac{6}{11}$이다.

# Section 9.4 연습문제

1.

풀이 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11$

3.

풀이 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

5.

풀이 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -a^3 - b^3 - c^3 + 3abc$

7.

풀이 $\begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

9.

풀이 $\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & ca \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = bc^2(a^3 + 3a^2b - ab^2 + b^3 - ac^2 + bc^2)$

11.

풀이 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$

13.

풀이 $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 4 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2+2\lambda-12=0$; $\lambda=-1\pm\sqrt{13}$

15.

풀이 $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$; $x^2-x-2=x^3-x$; $(x+1)(x^2-2x+2)=0$; $x=-1$

17.

풀이 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = (a_2-a_1)y-(b_2-b_1)x-(a_2b_1-a_1b_2)=0$이고 $a_1\neq a_2$이므로 두 점 $(a_1, b_1)$과 $(a_2, b_2)$를 지나는 직선 $y=\dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}x+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2-a_1}$이다.

19.

풀이 성질 (6)에 의하여 2열을 1열에 더하고 성질 (9)에 의하여 1열 성분에서 인수 2를 행렬식 밖으로 꺼낸다. 성질 (6)에 의하여 1열에 $(-1)$을 곱하여 2열에 더한다. 성질 (9)에 의하여 1열 성분에서 인수 $-1$을 행렬식 밖으로 꺼낸다.

21.

풀이 1열에 $-t$를 곱하여 2열에 더한다. 1열에 $-r$을 곱하여 3열에 더하고, 다시 2열에 $-s$를 곱하여 3열에 더한다.

23.

풀이 (a) $|2A|=2^3|A|=8\cdot 4=32$

(b) $|2A^{-1}|=2^3|A^{-1}|=\dfrac{8}{|A|}=2$

(c) $|2A^t|=2|A^t|=2|A|=2\cdot 4=8$

(d) $|(2A)^{-2}|=|(2A)^{-1}|^2=\left(\dfrac{1}{|2A|}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2^3|A|}\right)^2=\left(\dfrac{1}{8\cdot 4}\right)^2=\dfrac{1}{1024}$

25.

풀이 $|A|=10$이므로 16개의 여인수를 구하고, 역행렬을 구하면 다음과 같다.

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 & -4 \\ -2 & 6 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

27.

풀이 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-140$, $|A_1|=\begin{vmatrix} 10 & -4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & -2 & 1 \\ 20 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=474$

$|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 20 & 2 & 3 \end{vmatrix}=360$, $|A_3|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 10 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 20 & 3 \end{vmatrix}=-662$

$|A_4|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 20 \end{vmatrix}=-890$이므로

$x_1=\frac{474}{-140}=-\frac{237}{70}$, $x_2=\frac{360}{-140}=-\frac{18}{7}$, $x_3=\frac{-662}{-140}=\frac{331}{70}$, $x_4=\frac{-890}{-140}=\frac{89}{14}$이다.

29.

풀이 네 개의 노드에서 전류에 대한 다음 식을 얻는다.

$$i_1 = i_2 + i_4,\ i_4 = i_3 + i_5,\ i_6 = i_3 + i_5,\ i_1 = i_2 + i_6$$

그러므로 $i_1 = i_2 + i_4$, $i_4 = i_3 + i_5$, $i_4 = i_6$이다. 그리고 세 개의 안쪽 회로에서 다음 관계를 얻는다.

$$10i_1 + 10i_2 = 20,\ 10i_2 = 10i_3,\ 20 + 10i_3 = 10i_5$$

따라서 $i_1 + i_2 = 2$, $i_2 = i_3$, $i_3 - i_5 = 2$를 얻는다. 그러면 $i_2 = i_3$, $i_4 = i_6$이므로 $i_1$, $i_2$, $i_4$, $i_5$에 대한 연립방정식을 얻는다.

$$-i_1 + i_2 + i_4 = 0,\ i_2 - i_4 + i_5 = 0,\ i_1 + i_2 = 2,\ i_2 - i_5 = 2$$

따라서 계수행렬 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$와 상수행렬 $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$을 얻는다. 그러면

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4,\quad |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4,\quad |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,\quad |A_5| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

이고 따라서 구하고자 하는 전류는 각각 다음과 같다.

$$i_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1,\ i_2 = i_3 = \frac{|A_2|}{|A|} = 1,\ i_4 = i_6 = \frac{|A_4|}{|A|} = 0,\ i_5 = \frac{|A_5|}{|A|} = -1$$