Section 7.1 연습문제

1.

풀이 $\{(x,\ y) \mid x^2-1 \neq 0\} = \{(x,\ y) \mid x \neq -1,\ x \neq 1\}$

3.

풀이 $\{(x,\ y) \mid x^2-y^2 \neq 1\}$

5.

풀이 $\{(x,\ y) \mid x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,\ y) \mid (x-y)(x+y) \geq 0\}$

$= \{(x,\ y) \mid x-y \geq 0,\ x+y \geq 0\} \cup \{(x,\ y) \mid x-y \leq 0,\ x+y \leq 0\}$

$= \{(x,\ y) \mid y \leq x,\ y \geq -x\} \cup \{(x,\ y) \mid y \geq x,\ y \leq -x\}$

7.

풀이 $\{(x,\ y) \mid x+y+1 \geq 0\}$

9.

풀이 (b)

11.

풀이 (c)

Section 7.2 연습문제

1.

풀이 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$, $\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{y^2}{y^2}\right) = -1$이므로 극한이 존재하지 않는다.

3.

풀이 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \lim_{x\to 0}\frac{m^2x^3}{x^2(1+m^4x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0$이다. 즉, m에 관계없이 극한값이 0으로 동일하다. 그러나

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=my^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{(my^2)y^2}{(my^2)^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{my^4}{(m^2+1)y^4} = \frac{m}{1+m^2}$$

이다. 즉, 기울기 m인 포물선을 따라 $(x, y)\to(0, 0)$이면, 기울기에 따라 극한값이 다르게 나타난다. 그러므로 극한이 존재하지 않는다.

5.

풀이 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$

7.

풀이 $\lim_{(x,\,y)\to(1,\,-1)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{1^2-(-1)^2}{1^2+(-1)^2} = 0$

9.

풀이
$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$
$$= \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} (\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$$

11.

풀이 $\displaystyle \lim_{(x,\,y)\to(1,\,2)} \frac{x}{\sqrt{y+2}} = \lim_{x\to1} x\left(\lim_{y\to2}\frac{1}{\sqrt{y+2}}\right) = \lim_{x\to1}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

13.

풀이 $\displaystyle \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\lim_{y\to0} e^y\right) = \lim_{x\to1}\frac{\sin x}{x} = 1$

15.

풀이 $\displaystyle \lim_{(x,\,y,\,z)\to(1,\,1,\,0)} \frac{x e^y \sin z}{z} = \lim_{x\to1} x\left[\lim_{y\to1} e^y\left(\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}\right)\right] = \lim_{x\to1} x\left(\lim_{y\to1} e^y\right) = \lim_{x\to1} e\,x = e$

17.

풀이 $\displaystyle \lim_{\substack{x\to0\\ y=mx}} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0}\frac{2x^2(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to0}\frac{2mx^3}{(1+m^2)x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2mx}{1+m^2} = 0$이고, 뿐만 아니라 포물선 경로 $y=mx^2$ 또는 $x=my^2$에 따르는 경우에도 분자가 동일한 유형이 되어 극한은 0이다. 즉, $\displaystyle \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)}\frac{2x^2y}{x^2+y^2} = f(0,\,0) = 0$이므로 $(x,\,y)=(0,\,0)$에서 연속이다.

19.

풀이 $x=y^3$이 아닌 모든 $(x,\,y)$

21.

풀이 $y=x$이 아닌 모든 $(x,\,y)$

23.

풀이 $(x,\,y)\neq(0,\,0)$인 모든 $(x,\,y)$

25.

풀이 $x^2+y^2>4$인 모든 $(x,\ y,\ z)$

27.

풀이 $z \neq e^{x^2+y^2}$인 모든 $(x,\ y,\ z)$

Section 7.3 연습문제

1.

풀이 $f_x(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x+k, y) - f(x, y)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{((x+k)^3 - y^3) - (x^3 - y^3)}{k}$

$= \lim_{k \to 0} (3x^2 + 3xk + k^2) = 3x^2$

$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 - (y+h)^3) - (x^3 - y^3)}{h}$

$=- \lim_{h \to 0} \frac{3y^2 h + 3yh^2 + h_1^3}{h} =- 3y^2$

3.

풀이 $f_x(x, y) = 6x^2 + 2xy - y^2$, $f_x(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$

5.

풀이 $f_x(x, y, z) = y + z$, $f_x(x, y, z) = x + z$, $f_z(x, y, z) = x + y$

7.

풀이 $f_x(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$, $f_x(x, y, z) = 2\cos(x + 2y + 3z)$,

$f_z(x, y, z) = 3\cos(x + 2y + 3z)$

9.

풀이 $u = xy^2$이라 하면,

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = e^u \cdot y^2 = y^2 e^{xy^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = e^t \cdot y^2 = 2xye^{xy^2}$

11.

풀이 $u = x^2 + xy + y^2$이라 하면,

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot (2x + y) = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot (x + 2y) = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}$

13.

풀이 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{\ln y}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=(\ln x)\cdot\dfrac{1}{y(\ln y)^2}=\dfrac{\ln x}{y(\ln y)^2}$

15.

풀이 $u=x+y$, $v=x-y$라 하면,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\cos u\cos v\cdot 1+(-\sin u\sin v)\cdot 1$$

$$=\cos(x+y)\cos(x-y)-\sin(x+y)\sin(x-y)=\cos[(x+y)+(x-y)]=\cos 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\cos u\cos v\cdot 1+(-\sin u\sin v)\cdot(-1)$$

$$=\cos(x+y)\cos(x-y)+\sin(x+y)\sin(x-y)=\cos[(x+y)-(x-y)]=\cos 2y$$

17.

풀이 $f(x,y)=(x^2+xy)^3-(y^2-xy)^3$

$u=x^2+xy$, $v=y^2-xy$라 하면, $f(x,y)=u^3-v^3$이므로

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=3u^2\cdot(2x+y)-3v^2\cdot(-y)$$

$$=3(2x+y)(x^2+xy)^2+3y(y^2-xy)^2=3(x-y)^2y^3+3x^2(x+y)^2(2x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=3u^2\cdot x-3v^2\cdot(2y-x)$$

$$=3x(x^2+xy)^2-3(2y-x)(y^2-xy)^2=3(x-2y)(x-y)^2y^2+3x^3(x+y)^2$$

19.

풀이 $f(0,0)=0$이고 $f_x(0,0)=e^x\sin y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$, $f_y(0,0)=e^x\cos y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=1$이므로

접평면은 $z-0=0\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)$; $z=y$이다.

21.

풀이 $u=x-y,\ v=y-x$라 하면 $z=f(u,\ v)$이다.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot(-1)=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot(-1)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot 1=-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

그러므로 $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$이다.

23.

풀이 $u=\dfrac{y}{x}$라 하면,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+u^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

이므로

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

이다. 따라서 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$가 성립한다.

25.

풀이 $\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$

27.

풀이 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)=\dfrac{\partial z_x}{\partial r}\cos\theta+\dfrac{\partial z_y}{\partial r}\sin\theta$이므로

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}&=\left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\sin\theta\\&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta\end{aligned}$$

한편 $z_{xy}=z_{yx}$이므로

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

이다.

29.

풀이 $\dfrac{\partial}{\partial x}(yz)=\dfrac{\partial}{\partial x}(xy-z^2+\ln z)$; $y\dfrac{\partial z}{\partial x}=y-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $\left(y+2z-\dfrac{1}{z}\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}=y$;

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{yz+2z^2-1}$

$\dfrac{\partial}{\partial y}(yz)=\dfrac{\partial}{\partial y}(xy-z^2+\ln z)$; $z+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}$; $\left(y+2z-\dfrac{1}{z}\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-z$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(x-z)z}{yz+2z^2-1}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{yz+2z^2-1}\right)\\&=\frac{y\dfrac{\partial z}{\partial x}(yz+2z^2-1)-yz\left(y\dfrac{\partial z}{\partial x}+4z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{(yz+2z^2-1)^2}=-\frac{y^2z(1+2z^2)}{(yz+2z^2-1)^3}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{yz+2z^2-1}\right)$$

$$= \frac{\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)(yz+2z^2-1) - yz\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}+4z\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(yz+2z^2-1)^2}$$

$$= \frac{4z^5+4yz^4-2(xy+2)z^3-(xy-1)z}{(yz+2z^2-1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xz-z^2}{yz+2z^2-1}\right)$$

$$= \frac{(x-2z)\frac{\partial z}{\partial y}(yz+2z^2-1)-(xz-z^2)\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}+4z\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(yz+2z^2-1)^2}$$

$$= -\frac{(x-z)z(x+2xz^2+z(-3+2yz+2z^2))}{(yz+2z^2-1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz-z^2}{yz+2z^2-1}\right)$$

$$= \frac{\left(z+(x-2z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)(yz+2z^2-1)-(xz-z^2)\left(y\frac{\partial z}{\partial x}+4z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(yz+2z^2-1)^2}$$

$$= \frac{4z^5+4yz^4-2(xy+2)z^3-(xy-1)z}{(yz+2z^2-1)^3}$$

Section 7.4 연습문제

1.

풀이 $f_x(x, y) = -3x^2 + 4y$, $f_y(x, y) = 4x - 4y$이므로 $-3x^2 + 4y = 0$, $4x - 4y = 0$을 만족하는 (x, y)를 구하면 $(x, y) = (0, 0)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$이다. 한편

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \; f_{yy}(x, y) = -4, \; f_{xy}(x, y) = 4$$

이므로

$$D(0, 0) = f_{xx}(0, 0) f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = -16 < 0$$

이다. 따라서 $(0, 0, 1)$에서 안장점을 갖는다.

$$D\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) f_{yy}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) - \left[f_{xy}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)\right]^2 = (-8)(-4) - 16 = 16 > 0$$

이고 $f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8 < 0$이므로 $(x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$에서 극댓값 $f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{27}$를 갖는다.

3.

풀이 $f_x(x, y) = -2x + 4y$, $f_y(x, y) = 4x - 2y$이므로 $-2x + 4y = 0$, $4x - 2y = 0$을 만족하는 (x, y)를 구하면 $(x, y) = (0, 0)$이다. 한편

$$f_{xx}(x, y) = -2, \; f_{yy}(x, y) = -2, \; f_{xy}(x, y) = 4$$

이므로

$$D(0, 0) = f_{xx}(0, 0) f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = (-2)(-2) - 16 = -12 < 0$$

이다. 따라서 $(0, 0, 1)$에서 안장점을 갖는다.

5.

풀이 $f_x(x,\ y) = \sin y$, $f_y(x,\ y) = x\cos y$이므로 $\sin y = 0$, $x\cos y = 0$을 만족하는 $(x,\ y)$를 구하면 $(x,\ y) = (0,\ n\pi)$ (n은 정수)이다. 한편

$$f_{xx}(x,\ y) = 0,\ f_{yy}(x,\ y) = -x\sin y,\ f_{xy}(x,\ y) = \cos y$$

이므로

$$D(0,\ n\pi) = f_{xx}(0,\ n\pi)f_{yy}(0,\ n\pi) - [f_{xy}(0,\ n\pi)]^2 = -(\cos n\pi)^2 = -1 < 0$$

이다. 따라서 모든 정수 n에 대하여 $(0,\ n\pi,\ 0)$에서 안장점을 갖는다.

7.

풀이 $f_x(x,\ y) = \dfrac{x^2y-1}{x^2}$, $f_y(x,\ y) = \dfrac{xy^2-1}{y^2}$이므로 $x^2y-1=0$, $xy^2-1=0$을 만족하는 $(x,\ y)$를 구하면 $(x,\ y) = (1,\ 1)$이다. 한편

$$f_{xx}(x,\ y) = \frac{2}{x^3},\ f_{yy}(x,\ y) = \frac{2}{y^3},\ f_{xy}(x,\ y) = 1$$

이므로

$$D(1,\ 1) = f_{xx}(1,\ 1)f_{yy}(1,\ 1) - [f_{xy}(1,\ 1)]^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

이고 $f_{xx}(1,\ 1) = 2 > 0$이므로 극솟값 $f(1,\ 1) = 3$을 갖는다.

9.

풀이 $z_x = 2x+y$, $z_y = x-2y$이므로 $dz = (2x+y)dx + (x-2y)dy$

11.

풀이 $z_x = y\sin 2x - \cos^2 y$, $z_y = x\sin 2y + \sin^2 x$이므로
$dz = (y\sin 2x - \cos^2 y)dx + (x\sin 2y + \sin^2 x)dy$

13.

풀이 $z_x = \dfrac{xy-1}{x}$, $z_y = \dfrac{xy-1}{y}$이므로 $dz = \dfrac{xy-1}{x}dx + \dfrac{xy-1}{y}dy$

15.

풀이 반지름과 높이의 오차가 각각 2% 와 0.5% 내외이므로

$$\left|\frac{dr}{r}\right| \le 0.002, \quad \left|\frac{dh}{h}\right| \le 0.004$$

이다. 그리고 원통의 부피는 $V=\pi r^2 h$이므로

$$dV = V_r\, dr + V_h dh = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$$

이다. 따라서

$$\left|\frac{dV}{V}\right| = \left|\frac{2\pi r h dr + \pi r^2 dh}{\pi r^2 h}\right| = \left|\frac{2dr}{r} + \frac{dh}{h}\right| \le \left|\frac{2dr}{r}\right| + \left|\frac{dh}{h}\right| = 2\,(0.002) + 0.004 = 0.008$$

즉, 원통의 부피에 대한 최대 오차는 0.8%이다.

17.

풀이 $T_x = 4x-1$, $T_y = 2y$이므로 $4x-1=0$, $2y=0$을 만족하는 임계점은 $x=\frac{1}{4}$, $y=0$이다. 또한 $T_{xx}=4$, $T_{yy}=2$, $T_{xy}=0$이므로

$$D\left(\frac{1}{4}, 0\right) = f_{xx}\left(\frac{1}{4}, 0\right) f_{yy}\left(\frac{1}{4}, 0\right) - \left[f_{xy}\left(\frac{1}{4}, 0\right)\right]^2 = 4 \cdot 2 = 8 > 0$$

이고 $f_{xx}\left(\frac{1}{4}, 0\right) = 4 > 0$이므로 $(x, y) = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$에서 극솟값 $f\left(\frac{1}{4}, 0\right) = -\frac{1}{8}$을 갖는다. 한편 원판의 경계는 $x^2+y^2=1$이므로 원판의 경계에서 $y^2 = 1-x^2$, $-1 \le x \le 1$이다. 따라서 경계에서 온도는

$$T(x, y) = 2x^2 + (1-x^2) - x = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

이다. 그러므로 $x=\frac{1}{2}$인 경계에서 $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4}$이다. 따라서 가장 높은 온도는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$과 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서 $\frac{3}{4}$도이고 가장 낮은 온도는 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$에서 $-\frac{1}{8}$도이다.