Section 3.1 연습문제

1.

풀이 (a) $x < -1$에서 $f(x)$가 정의되지 않으므로 $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$가 존재하지 않는다.

(b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2$

(c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$이므로 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

(d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$

(e) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$

(f) $x > 2$에서 $f(x)$가 정의되지 않으므로 $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$는 존재하지 않는다.

3.

풀이 $x \to 0^-$이면, $x < 0$이므로 $|x| = -x$이고 따라서 $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{(-x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) = -1$

$x \to 0^+$이면, $x > 0$이므로 $|x| = x$이고 따라서 $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$이다. 따라서 좌극한과 우극한이 서로 다르므로 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$는 존재하지 않는다.

5.

풀이 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{2x - 1} = 1$

7.

풀이 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} (x + 4) = 8$

9.

풀이 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \dfrac{1}{4}$

11.

풀이 $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{3}$

13.

풀이 $\lim_{\substack{x\to 0\\ x:\text{유리수}}} f(x)=1,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x:\text{무리수}}} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.

15.

풀이 $\lim_{x\to 1} e^{(1-x)/(x^2-1)}=\lim_{x\to 1} e^{-1/(x+1)}=e^{-1/2}=-\frac{1}{\sqrt{e}}$

17.

풀이 $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1-x}=-\infty$이므로 $\lim_{x\to 1^+} e^{1/(1-x)}=0$

19.

풀이 $\lim_{x\to 2}\log_2\frac{x-2}{x^2-4}=\log_2\left(\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\log_2\left(\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}\right)=\log_2\frac{1}{4}=-2$

21.

풀이 $x\to(\pi/2)^+$이면 $|\cos x|\to 0^+$이므로 $\lim_{x\to(\pi/2)^+}\ln|\cos x|=-\infty$

23.

풀이 $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$이므로 $\lim_{x\to 1}\sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right)^2=\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

25.

풀이 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$이므로 $\lim_{x\to 0}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$

27.

풀이 $x=-t$라 하면, $x \to 0^-$일 때 $t \to 0^+$이고 $-x=t$이므로

$$\lim_{x \to 0^-}(1-x)^{1/x} = \lim_{t \to 0^+}(1+t)^{-1/t} = \left(\lim_{t \to 0^+}(1+t)^{1/t}\right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

29.

풀이 $\displaystyle \lim_{x \to 0}\frac{2^x-1}{3x} = \frac{1}{3}\lim_{x \to 0}\frac{2^x-1}{x} = \frac{1}{3}\ln 2$

31.

풀이 $\displaystyle \lim_{x \to 0}\frac{3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}\lim_{x \to 0}\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}\lim_{x \to 0}\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3}{2}$

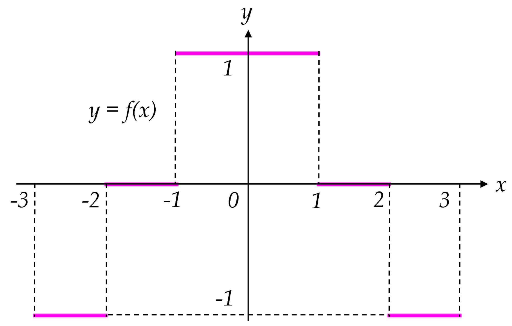
33.

풀이 $\displaystyle \lim_{x \to 0^+}\frac{\mathrm{cosec}\,3x}{2x} = \frac{3}{2}\lim_{x \to 0^+}\frac{\mathrm{cosec}\,3x}{3x} = \frac{3}{2}\lim_{x \to 0^+}\frac{1}{\frac{3x}{\sin 3x}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\lim\limits_{x \to 0^+}\frac{3x}{\sin 3x}} = \frac{3}{2}$

35.

풀이 $x \to 0^-$이면 $|x| \to 0^+$이고 $x \to 0^+$이면 $|x| \to 0^+$이므로 어느 경우이든 $2-|x|<2$이다. 그러므로 $h=|x|$라 하면, $x \to 0$일 때 $h \to 0^+$이고 $2-|x| \to 2^-$이다. 그러므로 $\displaystyle \lim_{x \to 0}[2-|x|]=1$이다.

$x \to 2^-$이면 $|x| \to 2^-$, $-|x| \to -2^+$이고 $2-|x| \to 0^+$이므로 $\displaystyle \lim_{x \to 2^-}[2-|x|]=0$이다. 한편 $x \to 2^+$이면 $|x| \to 2^+$, $-|x| \to -2^-$이고 $2-|x| \to 0^-$이므로 $\displaystyle \lim_{x \to 2^-}[2-|x|]=-1$이다. 그러므로 $\displaystyle \lim_{x \to 2}[2-|x|]$는 존재하지 않는다.



37.

풀이 $x \to 0^-$ 이면 $-x \to 0^+$ 이고, 따라서 $\lim_{x \to 0^-} [-x] = 0$, $\lim_{x \to 0^-} [x] = -1$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} [-x] + \lim_{x \to 0^-} [x] = -1$이다.

$x \to 0^+$ 이면 $-x \to 0^-$ 이고, 따라서 $\lim_{x \to 0^+} [-x] = -1$, $\lim_{x \to 0^+} [x] = 0$이므로

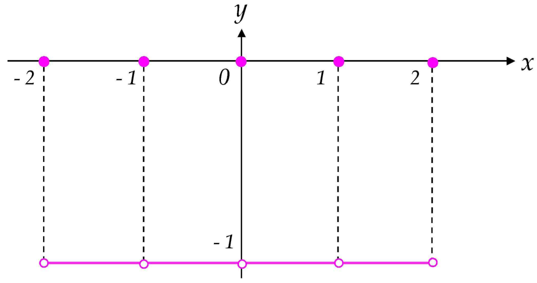
$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} [-x] + \lim_{x \to 0^-} [x] = -1$이다. 따라서 $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$이다.

$x \to 1/2^-$ 이면 $-x \to -1/2^+$ 이고, 따라서 $\lim_{x \to 1/2^-} [-x] = -1$, $\lim_{x \to 1/2^-} [x] = 0$이므로

$\lim_{x \to 1/2^-} f(x) = \lim_{x \to 1/2^-} [-x] + \lim_{x \to 1/2^-} [x] = -1$이다.

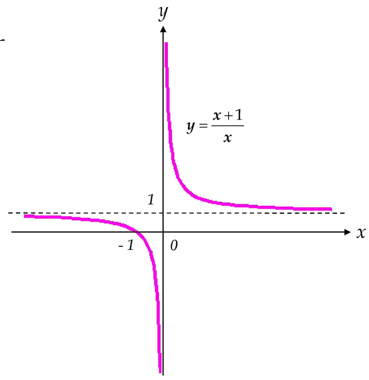
$x \to 1/2^+$ 이면 $-x \to -1/2^-$ 이고, 따라서 $\lim_{x \to 1/2^+} [-x] = -1$, $\lim_{x \to 1/2^+} [x] = 0$이므로

$\lim_{x \to 1/2^+} f(x) = \lim_{x \to 1/2^+} [-x] + \lim_{x \to 1/2^+} [x] = -1$이다. 따라서 $\lim_{x \to 1/2} f(x) = -1$이다.



39.

풀이 $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$이므로 함수 $y=f(x)$는 다음 그림과 같이 $y=\frac{1}{x}$을 y축 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.



$x\to-\infty$이면 $\frac{1}{x}\to 0$이므로 $1+\frac{1}{x}\to 1$이다.

따라서 $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}=1$이다.

41.

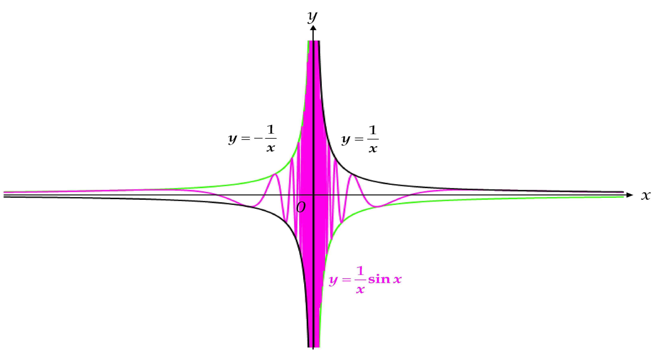
풀이 $x\to 0^{+}$이면 $\frac{1}{x}\to\infty$이므로 $1+\frac{1}{x}\to\infty$이다. 따라서 $\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x+1}{x}=\infty$이다.

43.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $|\sin x|\le 1$이므로 $\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|$, 즉 다음과 같다.

$$-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$$

또한 $\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right|=\infty$이므로 $-\infty\le\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\le\infty$이다. 즉, 극한은 모든 실수이므로 존재하지 않는다.

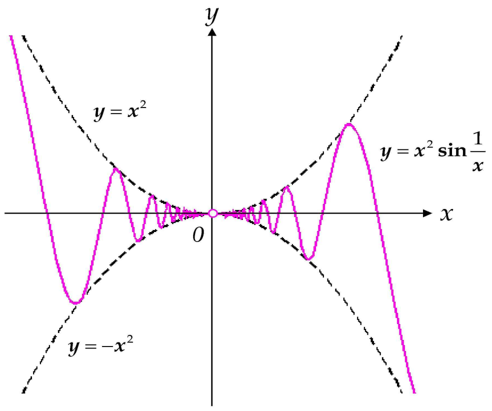


45.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $|\sin x| \le 1$이므로 $\left| x^2 \sin\frac{1}{x} \right| = |x^2| \left| \sin\frac{1}{x} \right| \le |x^2|$, 즉 다음과 같다.

$$-|x^2| \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le |x^2|$$

또한 $\lim_{x \to 0}|x^2| = 0$, $\lim_{x \to 0}(-|x^2|) = 0$이므로 $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$이다.



47.

풀이 $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to \infty} \sin\frac{1}{x} = 0$이므로 $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} = 0$이다.

49.

풀이 임의의 실수 x에 대하여 $-|x| \le x\sin x \le |x|$이므로 $-\infty = \lim_{x \to \infty}(-|x|) \le \lim_{x \to \infty} x\sin x \le \lim_{x \to \infty}|x| = \infty$이고 따라서 즉, 극한은 모든 실수이므로 존재하지 않는다. 또한 $-\infty = \lim_{x \to -\infty}(-|x|) \le \lim_{x \to -\infty} x\sin x \le \lim_{x \to -\infty}|x| = \infty$이므로 극한은 존재하지 않는다.

51.

풀이 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \frac{2}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{3x} = \frac{2}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} = \frac{2}{3}$이므로 $f(0) = \frac{2}{3}$로 정의하면, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$이므로 $x = 0$에서 연속이다.

53.

풀이 (a) v가 증가하면, l은 감소한다.

(b) $\lim_{v \to c^-} l = \lim_{v \to c^-} l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0$

(c) 함수 $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 의 정의역은 $[0, c]$이므로 $v > c$에서 극한을 생각할 수 없다.

Section 3.2 연습문제

1.

풀이 (a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x-(x-h)}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$

(b) 접선의 기울기가 -1이므로 $-\frac{1}{x^2} = -1$, 따라서 $x = \pm 1$이다. 즉, 접선의 접점은 $(1, 1)$과 $(-1, -1)$이고, 따라서 구하고자 하는 접선의 방정식은 $y = -x+2$, $y = -x-2$이다.

3.

풀이 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$이므로 $x = 0$에서 미분가능한 것을 보이고, $f'(0) = 0$이다.

5.

풀이 $y' = 2x + 2$

7.

풀이 $y' = (1-x)'(1+x^2)^{-1} + (1-x)\left((1+x^2)^{-1}\right)' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2}$

9.

풀이 $u = 1 - 2x - x^2$, $y = \sqrt{u}$라 하면, $\frac{du}{dx} = -2(x+1)$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -2(x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = -\frac{x+1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

11.

풀이 $u = \frac{x}{x^2 - 1}$, $y = \sqrt{u}$라 하면, $\frac{du}{dx} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = -\frac{x^2+1}{2(x^2-1)^2}\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$

13.

풀이 $y' = (2^x + e^{2x}) = (\ln 2)2^x + 2e^{2x}$

15.

풀이 $y' = (3^{\sin x} + \sin^3 x)' = (3^{\sin x})' + (\sin^3 x)'$

$= (\ln 3)3^{\sin x}\cos x + 3\sin^2 x\cos x = \cos x\,((\ln 3)3^{\sin x} + 3\sin^2 x)$

17.

풀이 $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$

19.

풀이 $u = x + \sqrt{1+x}$, $y = \ln u$라 하면, $\dfrac{du}{dx} = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{u}$이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right) = \frac{2\sqrt{1+x}+1}{2(x+\sqrt{1+x})\sqrt{1+x}}$$

21.

풀이 $v = \ln x$, $u = \sin v$, $y = \ln u$라 하면, $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{du}{dv} = \cos v$, $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{u}$이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos v \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sin(\ln x)} \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cot(\ln x)}{x}$$

23.

풀이 $y = \log_2 \dfrac{x^2-1}{x} = \dfrac{1}{\ln 2} \ln \dfrac{x^2-1}{x}$이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 2} \frac{\frac{d}{dx}(x^2-1)/x}{(x^2-1)/x} = \frac{1}{\ln 2} \frac{(x^2+1)/x^2}{(x^2-1)/x} = \frac{x^2+1}{(\ln 2)x(x^2-1)}$$

25.

풀이 양변에 자연로그를 취하여 $\ln y = \ln x^{x} = x\ln x$를 얻는다. 이제 양변을 x에 관하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x;\ \frac{dy}{dx} = y\,(1+\ln x) = (1+\ln x)\,x^{x}$$

27.

풀이 양변에 자연로그를 취하여 $\ln y = \ln x^{\ln x} = (\ln x)^{2}$를 얻는다. 이제 양변을 x에 관하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2\ln x}{x};\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}\ln x = 2x^{-1+\ln x}\ln x$$

29.

풀이 $u = 1+\ln x$, $y = \sin u$라 하면, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{dy}{du} = \cos u$이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \cos u \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(1+\ln x)}{x}$$

31.

풀이 $\dfrac{dy}{dx} = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$

33.

풀이 $v = x-1$, $u = \sqrt{v}$, $y = \cos^{-1}u$라 하면, $\dfrac{dv}{dx} = 1$, $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}$, $\dfrac{dy}{du} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}$이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot 1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

35.

풀이 $u=x^2-1$, $y=\sin^{-1}u$라 하면, $\dfrac{du}{dx}=2x$, $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot(2x)=\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$$

37.

풀이 $u=x^2+1$, $y=\sinh u$라 하면, $\dfrac{du}{dx}=2x$, $\dfrac{dy}{du}=\cosh u$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cosh u\cdot(2x)=2x\cosh\left(x^2+1\right)$$

39.

풀이 $w=x^2+1$, $v=\sqrt{w}$, $u=\cosh v$, $y=\ln u$라 하면, $\dfrac{dw}{dx}=2x$, $\dfrac{dv}{dw}=\dfrac{1}{2\sqrt{w}}$, $\dfrac{du}{dv}=\sinh v$, $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}=(2x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{w}}\cdot\sinh v\cdot\frac{1}{u}$$

$$=(2x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\sinh\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{\cosh\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\tanh\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

41.

풀이 $u=\sec x$, $y=\cosh^{-1}u$라 하면, $\dfrac{du}{dx}=\sec x\tan x$, $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\cdot\sec x\tan x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\sec^2x-1}}\cdot\sec x\tan x=\frac{\sec x\tan x}{|\tan x|}$$

43.

풀이 $v=x^2+1$, $u=\sqrt{v}$, $y=\coth^{-1}u$라 하면, $\dfrac{dw}{dx}=2x$, $\dfrac{dv}{dw}=\dfrac{1}{2\sqrt{w}}$, $\dfrac{dy}{du}=-\dfrac{1}{u^2-1}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=(2x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{w}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2-1}\right)$$

$$=-(2x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{(x^2+1)-1}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

45.

풀이 y를 x의 함수로 간주하고 양변을 x에 관하여 미분하면

$\dfrac{d}{dx}(x^3y^2-x^2-1)=0$; $3x^2y^2+2x^3yy'-2x=0$; $y'=\dfrac{2-3xy^2}{2x^2y}$이다.

47.

풀이 y를 x의 함수로 간주하고 양변을 x에 관하여 미분하면

$\dfrac{d}{dx}(x^2-xy+y^2)=0$; $2x-\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)+2y\dfrac{dy}{dx}=0$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-2x}{2y-x}$이다.

49.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=1$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2+2t$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{3t^2+2t}{1}=3t^2+2t$이다.

51.

풀이 $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2}{t^3}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{t-2}{t^3}$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{(t-2)/t^3}{-2/t^3}=1-\dfrac{t}{2}$이다.

53.

풀이 $\sin x$와 $\cos x$ 사이의 관계식 $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$를 이용하면

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

이므로 $y = \sin x$의 n계 도함수는 $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$이다.

55.

풀이 $f(x) = x^n$이면

$$f(z) - f(x) = z^n - x^n = (z - x)\cdot(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + z x^{n-2} + x^{n-1})$$

이므로, $f'(x)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{t - x} \\ &= \lim_{z \to x} (z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + z x^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= n x^{n-1} \end{aligned}$$

57.

풀이 n이 음의 정수일 때, $n = -k$라 하면 k는 양의 정수이다. 그러므로 [정리 3-11]의 (4)에 의하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^k}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(1)\cdot x^k - 1\cdot\frac{d}{dx}(x^k)}{(x^k)^2} \\ &= \frac{0\cdot x^k - 1\cdot(k x^{k-1})}{x^{2k}} = (-k)\frac{x^{k-1}}{x^{2k}} = -k x^{-k-1} = n x^{n-1} \end{aligned}$$

59.

풀이 (a) 양변을 x에 관하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

$$\frac{d}{dx}(x^3+y^3)=\frac{d}{dx}(6xy);\ 3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=6\left(y+x\frac{dy}{dx}\right);\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-2y}{2x-y^2}$$

(b) $x=3$, $y=3$이므로 $(3,3)$에서 접선의 기울기는

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=3\\y=3}}=\left.\frac{x^2-2y}{2x-y^2}\right|_{\substack{x=3\\y=3}}=-1$$

이다. 그러므로 접선의 방정식은 $y=-x+6$이다.

(c) 수평접선의 기울기는 0이므로 $x^2-2y=0$을 만족해야 한다. 그러므로 연립방정식 $x^3+y^3=6xy$, $x^2-2y=0$을 풀면, $x=0$, $x=2^{4/3}$이고, 따라서 수평접선을 갖는 점의 좌표는 $(0,0)$, $(2^{4/3},2^{5/3})$이다.

61.

풀이 (a) $\theta=\cos^{-1}(\operatorname{sech}x)$이므로 $\cos\theta=\operatorname{sech}x$이다. 따라서 항등식 $1-\tanh^2x=\operatorname{sech}^2x$와 그림에 의하여 $\cos\theta=\dfrac{\tanh x}{\operatorname{sech}x}=\sinh x$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\operatorname{sech}x}=\cosh x$, $\sin\theta=\tanh x$이다.

(b) $x=\cos^{-1}(\operatorname{sech}\theta)$라 하면, $\operatorname{sech}\theta=\cos x$, $\theta=\operatorname{sech}^{-1}(\cos x)$이고

$\operatorname{sech}^{-1}x=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$이므로

$\theta=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-\cos^2x}}{\cos x}\right)=\ln\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)=\ln(\sec x+\tan x)$이다.

Section 3.3 연습문제

1.

풀이 $f'(x)=2x-2=0$을 만족하는 x는 $x=1$이므로 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

감소하는 구간 : $-1 \le x \le 1$,　증가하는 구간 : $1 \le x \le 3$

3.

풀이 $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$을 만족하는 x는 $x=-1,\ 1$이고 $x=0$에서 $f'(x)$가 존재하지 않는다. 따라서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

감소하는 구간 : $-1 \le x < 0$,　$0 < x \le 1$,　증가하는 구간 : $-2 \le x < -1$, $1 \le x < 2$

5.

풀이 $f'(x)=\cos x-\sin x=0$이므로 $\tan x=1$을 만족하는 x는 $x=-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}$이므로 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-3\pi/4$	$\cdots$	$\pi/4$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

감소하는 구간 : $-\pi \le x \le -\dfrac{3\pi}{4}$,　$\dfrac{\pi}{4} \le x \le \pi$,　증가하는 구간 : $-\dfrac{3\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}$

7.

풀이 $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}=0$이므로 $f'(x)=0$을 만족하는 x는 $x=1$이고 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

감소하는 구간 : $0<x\le 1$, 증가하는 구간 : $1\le x\le e$

9.

풀이 주어진 구간에서 $f''(x)=6(x-1)$이므로 $x<1$이면 $f''(x)<0$이고 $x>1$이면 $f''(x)>0$이다. 그러므로 아래로 볼록인 구간은 $-2<x<1$이고 위로 볼록인 구간은 $1<x<4$이다.

11.

풀이 주어진 구간에서 $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$이므로 $x<0$이면 $f''(x)<0$이고 $x>0$이면 $f''(x)>0$이다. 그러므로 아래로 볼록인 구간은 $0<x<2$이고 위로 볼록인 구간은 $-2<x<0$이다.

13.

풀이 주어진 구간에서 $f''(x)=\cos x=0$을 만족하는 x는 $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}$이므로 $f(x)$의 볼록성을 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\pi/2$	$\cdots$	$\pi/2$	$\cdots$	π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

아래로 볼록인 구간 : $-\dfrac{\pi}{2}<x<-\dfrac{\pi}{2}$

위로 볼록인 구간 : $-\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$

15.

풀이 $0<x<3$에 대하여 $f''(x)=2+\dfrac{1}{x^2}>0$이므로 $0<x<3$에서 아래로 볼록이다.

17.

풀이 $f'(x)=(2x^2-2(k+1)x+k+2)e^{-2x}$이고, 모든 실수에서 $e^{-2x}>0$이므로 $f(x)$가 감소하기 위하여 $2x^2-2(k+1)x+k+2<0$이어야 한다. 그러므로 판별식을 D라 하면 $D=4k^2-12<0$으로부터 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$이다.

19.

풀이

[연습문제 9]

$f'(x)=3x^2-6x-2=0$을 만족하는 x는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{15}}{3}$이고,

$$f''\left(\frac{3-\sqrt{15}}{3}\right)=-2\sqrt{15}<0,\ f''\left(\frac{3+\sqrt{15}}{3}\right)=2\sqrt{15}>0$$

이므로 극댓값 $f\left(\dfrac{3-\sqrt{15}}{3}\right)=\dfrac{-9+10\sqrt{15}}{9}$, 극솟값 $f\left(\dfrac{3+\sqrt{15}}{3}\right)=\dfrac{-9-10\sqrt{15}}{9}$이다.

[연습문제 10]

$f'(x)=\dfrac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}=0$을 만족하는 x는 $x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$이고,

$$f''\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=4>0,\ f''\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=-4<0$$

이므로 극솟값 $f\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{9}{2}$, 극댓값 $f\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$이다.

[연습문제 11]

$f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0$을 만족하는 x는 $x = \pm 1$이고,

$$f''(-1) = -\frac{4\sqrt{27}}{27} < 0,\ f''(1) = \frac{4\sqrt{27}}{27} > 0$$

이므로 극댓값 $f(-1) = -2$, 극솟값 $f(1) = 2$이다.

[연습문제 12]

$f'(x) = -\dfrac{x+4}{x^3} = 0$을 만족하는 x는 $x = -4$이고, $f''(-4) = \dfrac{1}{64} > 0$이므로 극솟값 $f(-4) = -\dfrac{1}{8}$이다.

[연습문제 13]

주어진 구간에서 $f'(x) = 1 + \sin x = 0$을 만족하는 x는 $x = -\dfrac{\pi}{2}$이고, $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$이므로 극값을 판정할 수 없다.

[연습문제 14]

주어진 구간에서 $f'(x) = 1 + \cos x = 0$을 만족하는 x는 존재하지 않으므로 극값은 없다.

[연습문제 15]

주어진 구간에서 $f(x)$는 증가하므로 극값은 없다.

[연습문제 16]

$f'(x) = -x(x-2)e^{-x} = 0$을 만족하는 x는 $x = 0,\ 2$이고,

$$f''(0) = 2 > 0,\ f''(2) = -2e^{-2} < 0$$

이므로 극솟값 $f(0) = 0$, 극댓값 $f(2) = 4e^{-2}$이다.

20~27.

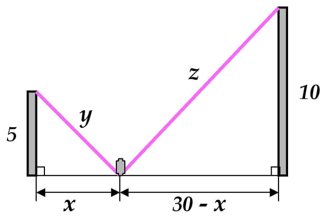
※ [연습문제 20]~[연습문제 27]은 해당 절의 내용이 아닙니다.
본 교재의 7.4절에서 다루고 있는 내용으로, 7.4절의 연습문제에서 확인하실 수 있습니다.

29.

풀이 밑면의 한 변의 길이를 x, 겉넓이를 S, 직육면체의 부피를 V 그리고 높이를 h라 하면, $S = x^2 + 4xh = 300$, $V = x^2 h$이다. 따라서 겉넓이로부터 $h = \dfrac{300 - x^2}{4x}$이고, 밑넓이가 300보다 작아야 하므로 $x^2 < 300$이다. 따라서 부피는 $V = x^2 h = \dfrac{1}{4}x(300 - x^2)$, $0 < x < 10\sqrt{3}$이다. $V' = -\dfrac{3(x^2 - 100)}{4}$이므로 $V' = 0$을 만족하는 x는 $x = 10$이고, 이 x의 부근에서 V'이 +에서 −로 변하므로 $x = 10$에서 극대이고 최대이다. 따라서 직육면체의 부피가 최대가 되는 밑면은 10cm이고 높이는 5cm이다. 그리고 이때 최대 부피는 500㎤이다.

31.

풀이 오른쪽 그림과 같이 우선 5m 막대와 10m 막대로부터 말뚝까지 두 철선의 길이를 각각 y, z라고 하고, 5m 막대로부터 말뚝가지 거리를 x 그리고 두 철선의 길이를 l이라고 하자. 그러면 $l = y + z$이고, 피타고라스 정리에 의하여 다음 관계식이 성립한다.



$$x^2 + 25 = y^2,\ (30 - x)^2 + 100 = z^2;$$
$$y = \sqrt{x^2 + 25},\ z = \sqrt{x^2 - 60x + 1000}$$

이때 x는 두 막대 사이에 있는 말뚝의 위치이므로 $0 < x < 30$이고, 두 철선의 길이는 다음과 같다.

$$l = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{x^2 - 60x + 1000}$$

따라서 l의 극소값과 양 끝점에서 함수값 $l(0)$과 $l(30)$을 비교하여 가장 작은 값이 최소값이다. 이를 위하여 임계점을 구한다.

$$\frac{dl}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1000}} = 0;$$
$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1000} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 25};$$
$$x^2(x^2 - 60x + 1000) = (x - 30)^2(x^2 + 25);$$
$$75(x^2 + 20x - 300) = 0;\ x = -30,\ 10;\quad x = 10$$

따라서 $x=10$ 부근에서 극값 $l(10)$을 구하고 $l(0)$과 $l(30)$을 비교하여 가장 작은 값을 선택한다.

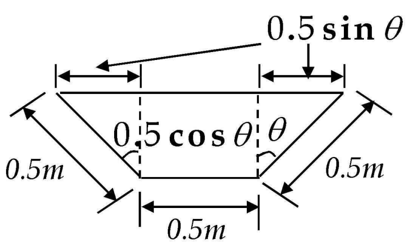
x	0	$\cdots$	10	$\cdots$	30
l'		$-$	0	$+$	
l	$5+10\sqrt{10}$	$\searrow$	극소 $15\sqrt{5}$	$\nearrow$	$10+5\sqrt{37}$

그러므로 구하고자 하는 말뚝의 위치는 $x=10$이고, 두 철선의 길이는 $y=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$, $z=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$이다.

33.

풀이 이 물줄기의 측면의 넓이를 $S(\theta)$라 하면, 부피는 $V=100S(\theta)$이고 측면의 넓이가 최대인 θ에서 V는 최대가 된다. 한편 아래 그림과 같이 측면의 넓이는 다음과 같다.

$$S(\theta)=0.5\cos\theta+2\cdot\frac{1}{2}(0.5)\cos\theta\cdot(0.5)\sin\theta=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta$$



$S'(\theta)=\frac{1}{4}(\cos^2\theta-2\sin\theta-\sin^2\theta)=-\frac{1}{4}(2\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0$이므로 임계점을 구하기 위하여 $\sin\theta=x$라 하면, $-1\le x\le 1$이고 $2x^2+2x-1=0$이다. 그러므로 $x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, 즉 $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$이다. 그리고 이 θ부근에서 $S'(\theta)$의 부호가 $+$에서 $-$로 변하므로 극대이면서 최대가 된다. 따라서 물줄기의 최대 부피는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\frac{3+3\sqrt{3}}{8}$$

35.

풀이 제동을 걸기 시작한 순간을 $t=0$이라 하면, $v(0)=150$이고 $a=-1$이므로 제동을 걸기 시작한 이후 전동차의 속도는 $v(t)=150-3t$이다. 그러므로 전동차가 완전히 멈출 때까지 걸린 시간은 $150-3t=0$; $t=50$이다. 또한 제동을 걸기 시작하여 완전히 멈출 때까지 움직인 거리는

$$x(t)=\frac{1}{2}(-3)(50)^2+(150)\cdot(50)=3750(\mathrm{m})$$

이다.

Section 3.4 연습문제

1.

풀이 $f'(x)=\frac{1}{x^2}$이므로 $\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{1}{5}=\frac{1}{c^2}$을 만족하는 c는 $c=\sqrt{5}$이다.

3.

풀이 $f'(x)=-\sin x$이므로 $\frac{f(\pi/2)-f(0)}{\pi/2-0}=-\frac{2}{\pi}=-\sin c$를 만족하는 c는 $c=\sin^{-1}\frac{2}{\pi}$이다.

5.

풀이 $f'(x)=1-\cos x$이므로 $\frac{f(\pi/2)-f(0)}{\pi/2-0}=\frac{\pi-2}{\pi}=1-\cos c$를 만족하는 c는 $c=\cos^{-1}\frac{2}{\pi}$ 이다.

7.

풀이 $y'=8x-2$이므로 $dy=2(4x-1)dx$

9.

풀이 $y'=\cos x-2\sin x$이므로 $dy=(\cos x-2\sin x)dx$

11.

풀이 $y'=\frac{x-1}{x}$이므로 $dy=\frac{x-1}{x}dx$

13.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/\sqrt{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

15.

풀이 $\lim_{x\to 0^+}(\ln x-\ln(\sin x))=\lim_{x\to 0^+}\ln\frac{x}{\sin x}=\ln\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\right)=\ln 1=0$

17.

풀이 $$\lim_{x \to \pi/2^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\frac{1}{2}(\pi - 2x)\cos x - \sin x}{-\sin x} = 1$$

19.

풀이 $$\lim_{x \to 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2^{\sin x} \cos x \,(\ln 2)}{1} = \ln 2$$

21.

풀이 $$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

23.

풀이 $y = (1-2x)^{1/x}$이라 하면, $\ln y = \dfrac{\ln(1-2x)}{x}$이므로

$\lim\limits_{x \to 0} \ln y = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-2x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2/(1-2x)}{1} = -2$; $\lim\limits_{x \to 0} (1-2x)^{1/x} = \lim\limits_{x \to 0} y = e^{-2}$ 이다.

25.

풀이 $f(x)$가 모든 실수에서 미분 가능하므로 $f(x)$는 $(0, 3)$에서 미분 가능하고 $[0, 3]$에서 연속이다. 따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{f(3) - (-2)}{3} = f'(c)$$

인 c가 $(0, 3)$ 안에 존재한다. 특히 모든 x에 대하여 $f'(x) \le 4$이므로 $f'(c) \le 4$이다. 따라서 $f(3) = 3f'(c) - 2 \le 3 \cdot 4 - 2 = 10$이다. 즉, $f(3)$이 가질 수 있는 최대값은 10이다.

27.

풀이 일반성을 잃지 않고 $a<b$라 하자. 그리고 $f(x)=\sin x$라 하면 $f(x)$는 모든 실수에서 미분 가능하므로 $f(x)$는 (a, b)에서 미분 가능하고 $[a, b]$에서 연속이다. 따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\sin b-\sin a}{b-a}=f'(c)=\cos c$$

인 c가 (a, b) 안에 존재한다. 한편 $-1 \leq \cos c \leq 1$이므로

$$-1 \leq \frac{\sin b-\sin a}{b-a} \leq 1; \left|\frac{\sin b-\sin a}{b-a}\right| \leq 1$$

이다. 따라서 $|\sin b-\sin a| \leq |b-a|$ 또는 $|\sin a-\sin b| \leq |a-b|$이다.

29.

풀이 $x<0$이면 $f(x)=g(x)$이므로 $f'(x)=g'(x)=-\frac{1}{x^2}$이고 $f(x)-g(x)=0$이다. 한편 $x>0$이면 $f'(x)=g'(x)=-\frac{1}{x^2}$이고 $f(x)-g(x)=1$이다. 그러므로 임의의 상수 C에 대하여 $f(x)-g(x)=C$라고 할 수 없다. 그 이유는 $x=0$에서 두 함수 f와 g가 미분 가능하지 않기 때문이다.

31.

풀이 시각 t에서 온도계의 온도를 $T(t)$라고 하자. 그러면 $T'(t)$는 시각 t에서에서 온도계의 순간온도 변화율 즉, 수은의 순간변화율이다. 이때 $T(0)=-20$, $T(10)=100$이므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{T(10)-T(0)}{10-0}=\frac{100-(-20)}{10}=12=T'(t_0)$$

를 만족하는 $0<t_0<14$가 존재한다.