Section 1.1 연습문제

1.

풀이 $\text{dom}(f)=\{x \mid -\infty < x < \infty\}$, $\text{ran}(f)=\{y \mid -\infty < y \leq -1\}$

3.

풀이 $\text{dom}(f)=\{x\in R \mid 3-2x \geq 0\}=\left\{x\in R \mid x \leq \frac{3}{2}\right\}$, $\text{ran}(f)=\{y\in R \mid y \geq 0\}$

5.

풀이 $\text{dom}(f)=\{x\in R \mid 4-x^2 > 0\}=\{x\in R \mid -2 < x < 2\}$, $\text{ran}(f)=\left\{y\in R \mid y \geq \frac{1}{2}\right\}$

7.

풀이 $\text{dom}(f)=\{x\in R \mid x^2-1 \geq 0\}=\{x\in R \mid x \leq -1\}\cup\{x\in R \mid x \geq 1\}$,
$\text{ran}(f)=\{y\in R \mid y \leq 1\}$

9.

풀이 $(f+g)(x)=2x-3+\sqrt{x+1}$, $\text{dom}(f)=\{x\in R \mid x \geq -1\}$

$(f-g)(x)=2x-3-\sqrt{x+1}$, $\text{dom}(f)=\{x\in R \mid x \geq -1\}$

$(2f-g)(x)=4x-6-\sqrt{x+1}$, $\text{dom}(f)=\{x\in R \mid x \geq -1\}$

$(f\cdot g)(x)=(2x-3)\sqrt{x+1}$, $\text{dom}(f)=\{x\in R \mid x \geq -1\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{x+1}}$, $\text{dom}(f)=\{x\in R \mid x > -1\}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{2x-3}$, $\text{dom}(f)=\left\{x\in R \mid x \geq -1,\ x \neq \frac{3}{2}\right\}$

11.

풀이 $(f+g)(x)=\frac{1}{x-3}+x^2-1$, $\text{dom}(f)=\{x\in R \mid x \neq 3\}$

$(f-g)(x)=\frac{1}{x-3}-x^2+1$, $\text{dom}(f)=\{x\in R \mid x \neq 3\}$

$(2f-g)(x)=\dfrac{2}{x-3}-x^2+1$, $\mathrm{dom}(f)=\{x\in R \mid x\neq 3\}$

$(f\cdot g)(x)=\dfrac{x^2-1}{x-3}$, $\mathrm{dom}(f)=\{x\in R \mid x\neq 3\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{1}{(x-3)(x^2-1)}$, $\mathrm{dom}(f)=\{x\in R \mid x\neq -1,\,1,\,3\}$

$\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=(x-3)(x^2-1)$, $\mathrm{dom}(f)=\{x\in R \mid -\infty<x<\infty\}$

13.

풀이 $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{g(x)-1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{|x|}-1}=\dfrac{|x|}{1-|x|}$, $\mathrm{dom}(f)=\{x\in R \mid x\neq -1,\,1\}$

$(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{|f(x)|}=|x-1|$, $\mathrm{dom}(f)=$ 모든 실수

15.

풀이 함수이다.

17.

풀이 함수이다.

19.

풀이 함수이다.

21.

풀이 함수가 아니다.

23.

풀이 함수가 아니다.

25

풀이 함수가 아니다.

27.

풀이 $f(x)=\begin{cases} x+1 & , \ -1 \le x < 0 \\ -x+1 , & 0 \le x < 1 \\ 0 & , \ x < -1, \ x \ge 1 \end{cases}$

29.

풀이 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=x$도 역시 실수이므로 $\mathrm{dom}(f)=\{x : x \in R\}=R$이다.

31.

풀이 $x \ge 0$인 실수에 한하여 $\sqrt{x}$가 실수로 정의되므로 $\mathrm{dom}(h)=\{x : x \ge 0\}$이다.

33.

풀이 $(g \circ h)(x)=\left|-1+\sqrt{x^2-1}\right|$; $(f \circ (g \circ h))(x)=\dfrac{1}{\left|-1+\sqrt{x^2-1}\right|}$

35.

풀이 $(f \circ h)(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $(g \circ (f \circ h))(x)=\left|\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}-1\right|$

37.

풀이 $(f \circ g)(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$; $(h \circ (f \circ g))(x)=\sqrt{\dfrac{1}{(x-1)^2}-1}=\dfrac{2x-x^2}{|x-1|}$

39.

풀이

	$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$
(a)	$\sqrt{x}$	$\|x-1\|$	$\sqrt{\|x-1\|}$	$\|-1+\sqrt{x}\|$
(b)	$\dfrac{x}{x+1}$	$x-1$	$\dfrac{x-1}{x}$	$-\dfrac{1}{x+1}$
(c)	x^2-2	$\sqrt{x}$	$(\sqrt{x})^2-2$	$\sqrt{x^2-2}$

Section 1.2 연습문제

1.

풀이 치역 $B: -3 \le y \le 5$, $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)=0$이라 하면 $x=1$, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$이므로 $f\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=f\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=f(1)=0$이고, 따라서 단사는 아니다. 그러나 치역 $B: -3\le y\le 5$안의 임의의 y에 대하여 $y=f(x)$를 만족하는 x가 정의역 $A: -2\le x\le 2$ 안에 적어도 하나 존재하므로 전사이다.

3.

풀이 치역 $B: 2<y<\infty$ 안의 임의의 y에 대하여 $y=f(x)$를 만족하는 x가 정의역 $A: 1<x\le 2$ 안에 적어도 하나 존재하므로 전사이다. 또한 $x_1\ne x_2$이면 $x_1-1\ne x_2-1$; $\dfrac{1}{x_1-1}+1\ne\dfrac{1}{x_2-1}+1$이므로 $f(x_1)\ne f(x_2)$이고 따라서 단사이다. 그러므로 $y=f(x)$는 전단사이다.

5.

풀이 $y=\sqrt{3x-1}$이라 하면, $3x-1=y^2$; $x=\dfrac{1}{3}(y^2+1)$, $y\ge 0$이므로 역함수와 정의역은 $y=f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+1)$, $x\ge 0$이다.

7.

풀이 $y=\sqrt{x^3-1}$이라 하면, $x^3-1=y^2$; $x=\sqrt[3]{y^2+1}$, $y\ge 0$이므로 역함수와 정의역은 $y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$, $x\ge 0$이다.

9.

풀이 $f^{-1}(1)=b$라 하면, $f(b)=1$이므로 $f(b)=b^3-2=1$; $b^3=3$; $b=\sqrt[3]{3}$, 즉 $f^{-1}(1)=\sqrt[3]{3}$이다.

11.

풀이 $f^{-1}(6)=b$라 하면, $f(b)=6$이므로 $f(b)=b^3-\dfrac{4}{b}=6$; $(b-2)(b^3+2b^2+4b+2)=0$; $b=2$, 즉 $f^{-1}(6)=2$이다.

13.

풀이 $y=2x+1$이라 하면, $x=\frac{1}{2}(y-1)$이므로 역함수는 $y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)$이다. $y=\sqrt{x-4}$ 라 하면, $x=y^2+4$이므로 역함수는 $y=g^{-1}(x)=x^2+4$이다. $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=f^{-1}(g^{-1}(x))=f^{-1}(x^2+4)=\frac{1}{2}[(x^2+4)-1]=\frac{1}{2}(x^2+3)$

15.

풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\sqrt{x-4}+1$이므로 $y=2\sqrt{x-4}+1$라 하면, $x=\frac{1}{4}(y-1)^2+4$ 이다. 그러므로 $(f\circ g)^{-1}(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2+4$이다.

17.

풀이 $2<x_1<x_2$이면 $x_1^3-2<x_2^3-2$; $\sqrt{x_1^3-2}<\sqrt{x_2^3-2}$; $f(x_1)<f(x_2)$이므로 증가함수이다.

19.

풀이 $y^2=4-x^2$; $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ 이고 $y>0$이므로 $y=\sqrt{4-x^2}$ 이다.

21.

풀이 $x+xy+y=1$; $(x+1)y=1-x$; $y=\frac{1-x}{x+1}$, $x>-1$이다.

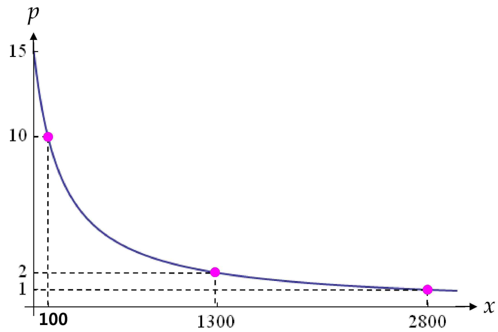
23.

풀이 $y=f(x)$가 정의역 안의 모든 x에 대하여 증가한다고 하자. 정의역 안의 임의의 서로 다른 두 수를 x_1, x_2라 하면 $x_1<x_2$이거나 $x_1>x_2$이다. 그러면 $f(x_1)<f(x_2)$이거나 $f(x_1)>f(x_2)$이다. 그러므로 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 증가함수는 단사함수이다. 또한 함수 f의 공역과 치역이 동일하므로 함수 f는 전사함수이다. 그러므로 증가함수 f는 전단사함수이다. 감소함수의 경우도 동일하게 증명된다.

25.

풀이 (a) $p(100)=10$, $p(1300)=2$, $p(2800)=1$

(b)



(c) $x(p)=\dfrac{200(15-p)}{p}$

(d) $p(x)$가 감소함수이므로 역함수 $x(p)$도 역시 감소함수이고, $x(6)=300$이므로 300,000개 이상 팔리면 가격이 6만원 이하로 떨어진다.

Section 1.3 연습문제

1.

풀이 거짓, $f(x)=x^2$; $f(x+y)=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy \neq f(x)+f(y)=x^2+y^2$

3.

풀이 참

5.

풀이 $f(-x)=(-x)^5-(-x)^3+(-x)=(-1)^5x^5-(-1)^3x^3+(-1)x=-x^5+x^3-x$

$$=-(x^5-x^3+x)=-f(x)$$

따라서 $f(x)$는 기함수이다.

7.

풀이 $f(-x)=(-x)^2+(-x)-1=(-1)^2x^2+(-1)x-1=x^2-x-1$이므로 $f(-x)=-f(x)$도 아니고 $f(-x)=f(x)$도 아니다. 그러므로 $f(x)$는 우함수도 아니고 기함수도 아니다.

9.

풀이 $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{3-(-x)}=\dfrac{(-1)^2x^2}{3+x}=\dfrac{x^2}{3+x}$이므로 $f(-x)=-f(x)$도 아니고 $f(-x)=f(x)$도 아니다. 그러므로 $f(x)$는 우함수도 아니고 기함수도 아니다.

11.

풀이 f는 우함수이고, g는 기함수이므로 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$이다.

(a) $F(x)=(f+g)(x)$라 하면 $F(-x)=(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)$이므로 $F(-x)\neq F(x)$, $F(-x)\neq -F(x)$이다. 그러므로 $f+g$는 우함수도 기함수도 아니다.

(b) $F(x)=(f\cdot g)(x)$라 하면

$F(-x)=(f\cdot g)(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot(-g(x))=-f(x)\cdot g(x)=-F(x)$이므로

$f\cdot g$는 기함수이다.

(c) $F(x)=(f/g)(x)$라 하면 $F(-x)=(f/g)(-x)=\dfrac{f(-x)}{g(-x)}=\dfrac{f(x)}{-g(x)}=-\dfrac{f(x)}{g(x)}=-F(x)$ 이므로 $f\cdot g$는 기함수이다.

(d) $F(x)=(g/f)(x)$라 하면 $F(-x)=(g/f)(-x)=\dfrac{g(-x)}{f(-x)}=\dfrac{-g(x)}{f(x)}=-\dfrac{g(x)}{f(x)}=-F(x)$

이므로 $f\cdot g$는 기함수이다.

(e) $F(x)=(f\cdot f)(x)$라 하면
$F(-x)=(f\cdot f)(-x)=f(-x)\cdot f(-x)=f(x)\cdot f(x)=(f\cdot f)(x)=F(x)$이므로
$f\cdot f$는 우함수이다.

(f) $F(x)=(g\cdot g)(x)$라 하면
$F(-x)=(g\cdot g)(-x)=g(-x)\cdot g(-x)=(-g(x))\cdot(-g(x))=(g\cdot g)(x)=F(x)$이므로
$g\cdot g$는 우함수이다.

(g) $F(x)=(f\circ g)(x)=f[g(x)]$라 하면, $F(-x)=f[g(-x)]=f[-g(x)]=f[g(x)]=F(x)$이므로 $f\circ g$는 우함수이다.

(h) $F(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)]$라 하면, $F(-x)=g[f(-x)]=g[f(x)]=F(x)$이므로 $g\circ f$는 우함수이다.

(i) $F(x)=(f\circ f)(x)=f[f(x)]$라 하면, $F(-x)=f[f(-x)]=f[f(x)]=F(x)$이므로 $f\circ f$는 우함수이다.

(j) $F(x)=(g\circ g)(x)=g[g(x)]$라 하면, $F(-x)=g[g(-x)]=g[-g(x)]=-g[g(x)]=-F(x)$ 이므로 $g\circ g$는 기함수이다.

13.

풀이 $g(x)=f(x-1)-1=[-(x-1)^2+1]-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2$

15.

풀이 $g(x)=f(x+1)-2=\frac{1}{x+1}-2=\frac{2x-1}{x+1}$

17.

풀이 x축 대칭 : $g(x)=-f(x)=-\frac{1}{x-1}$,

y축 대칭 : $g(x)=f(-x)=\frac{1}{(-x)-1}=-\frac{1}{x+1}$

원점 대칭 : $g(x)=-f(-x)=-\frac{1}{(-x)-1}=\frac{1}{x+1}$

19.

풀이 x축 대칭 : $g(x)=-f(x)=-\left(\frac{1}{x^2}-x+2\right)=-\frac{1}{x^2}+x-2$,

y축 대칭 : $g(x)=f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}-(-x)+2=\frac{1}{x^2}+x+2$

원점 대칭 : $g(x)=-f(-x)=-\left(\frac{1}{(-x)^2}-(-x)+2\right)=-\frac{1}{x^2}-x-2$

21.

풀이 $f(x/2)=\left(\frac{x}{2}\right)^2-2=\frac{x^2}{4}-2$

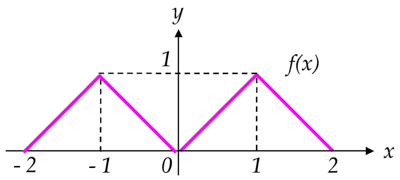
23.

풀이 $f(2x)=1-\sqrt{(2x)^2-1}=1-\sqrt{4x^2-1}$

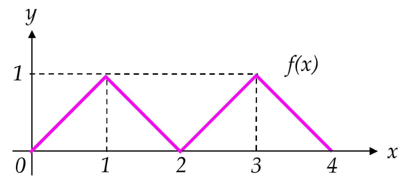
25.

풀이 (a) $f(x)=\begin{cases} x & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 , & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

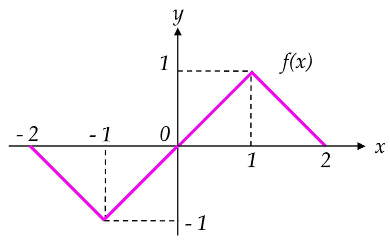
(b) $f(x)=\begin{cases} x+2 & , \ -2 \leq x < -1 \\ -x & , \ -1 \leq x < 0 \\ x & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 , & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



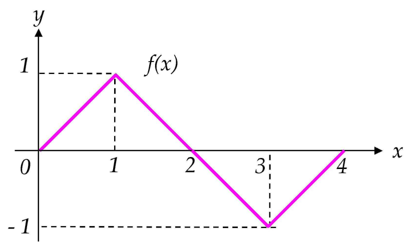
(c) $f(x)=\begin{cases} x & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 , & 1 < x \leq 2 \\ x-2 & , \ 2 < x \leq 3 \\ -x+4 , & 3 < \leq x \leq 4 \end{cases}$



(d) $f(x)=\begin{cases} -x-2 , & -2 \leq x < -1 \\ x & , \ -1 \leq x \leq 1 \\ -x+2 , & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

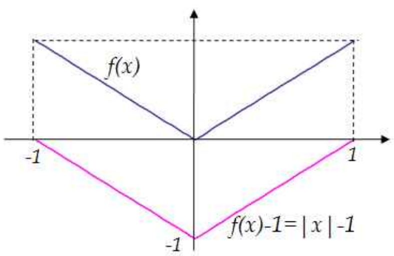


(e) $f(x)=\begin{cases} x & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 , & 1 < x \leq 3 \\ x-4 & , \ 3 \leq x < 4 \end{cases}$



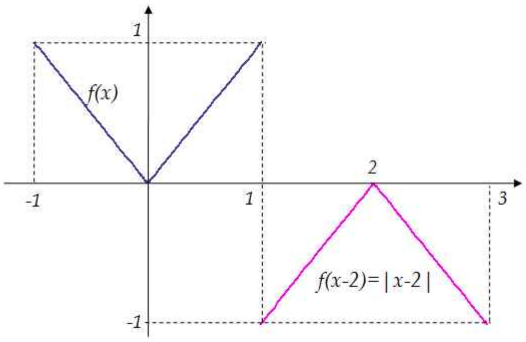
27.

풀이



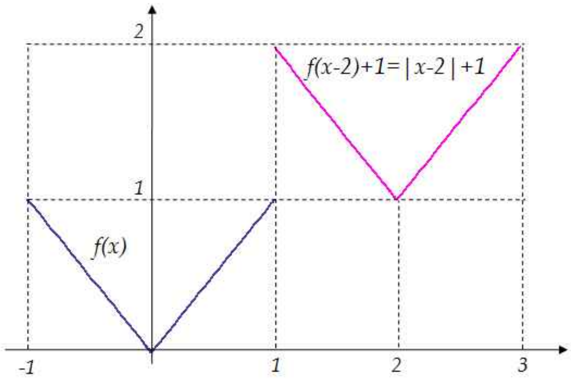
29.

풀이



31.

풀이



33.

풀이 $f(x)=\begin{cases}-x & , \ -1 \le x < 0 \\ x & , \ 0 \le x < 1 \\ f(x-2), & \text{다른 곳에서}\end{cases}$, $f(2013)=f(1+2\cdot 1006)=f(1)=1$

35.

풀이 $f(x)=\begin{cases}x & , \ 0 < x \le 1 \\ 0 & , \ 1 < x \le 2 \\ f(x-2), & \text{다른 곳에서}\end{cases}$, $f(2013)=f(1+2\cdot 1006)=f(1)=1$

37.

풀이 $f(x)=\begin{cases}-x & , \ -1 \le < x < 1 \\ f(x-2), & \text{다른 곳에서}\end{cases}$, $f(2013)=f(1+2\cdot 1006)=f(1)=1$

39.

풀이 $T=2,\ f(2014)=f(0+2\cdot 1007)=f(0)=-1$

41.

풀이 $T=2,\ f(2014)=f(0+2\cdot 1007)=f(0)=-1$

43.

풀이 $T=3,\ f(2014)=f(1+3\cdot 671)=f(1)=0$

45.

풀이 $g(x)=H(x-1)f(x)$

47.

풀이 $E(t)=100[H(t-3)-H(t-6)]$