Section 4.1 연습문제

1.

풀이 $\displaystyle\int (2x-1)\,dx = x^2 - x + C$

3.

풀이 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{1/2}x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$

5.

풀이 $\displaystyle\int \frac{(1-\sqrt{x}\,)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int (x^{1/2} - 1 + x^{-1/2})\,dx$

$$= \frac{1}{3/2}x^{3/2} - x + \frac{1}{1/2}x^{1/2} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - x + C$$

7.

풀이 $\displaystyle\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$

$$= \int (1 - \sin x)\,dx = x + \cos x + C$$

9.

풀이 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{1} (x^4 - 2x^3 + 1)\,dx = 2\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x\right)\Bigg|_0^1$

$$= 2\left(\frac{7}{10} - 0\right) = \frac{7}{5}$$

11.

풀이 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3}\,dx = \int_1^2 (x^{-1} - x^{-3})\,dx = \ln x + \frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^2$

$$= \left(\ln 2 + \frac{1}{8}\right) - \left(\ln 1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} + \ln 2$$

13.

풀이 $\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x^3}\right)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{7}{4}}\right)dx = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}\Big|_0$

$$= \frac{3}{7}+\frac{4}{11}=\frac{61}{77}$$

15.

풀이 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x|\,dx = \int_{-\pi/2}^{0} (-\sin x)\,dx + \int_{-0}^{\pi/2} \sin x\,dx = \left(\cos x\,\Big|_{-\pi/2}^{0}\right)+\left(-\cos x\,\Big|_0^{\pi/2}\right)$

$$= 1+1=2$$

17.

풀이 $\frac{d}{dx}\int_0^{2x} \frac{1}{t^4+1}\,dt = \frac{1}{x^4+1}\cdot(2x)' = \frac{2}{x^4+1}$

19.

풀이 $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^2} \frac{t^3}{1+t^2}\,dt = \frac{(x^2)^3}{1+(x^2)^2}\cdot(x^2)' - \frac{(-x)^3}{1+(-x)^2}\cdot(-x)'$

$$= \frac{2x^7}{1+x^4} - \frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x^3(2x^6+x^4-1)}{(1+x^4)(1+x^2)}$$

21.

풀이 (a) $0 \le x \le 2$이면 $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^x = \frac{1}{2}x^2$

$0 \le x \le 4$이면

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^2 t\,dt + \int_2^x (4-t)\,dt$$

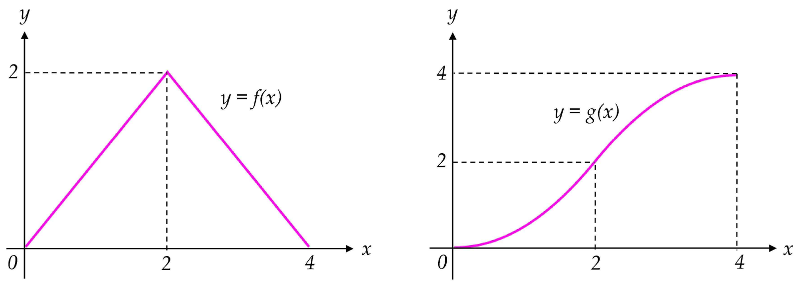
$$= \left(\frac{1}{2}t^2\Big|_0^2\right) + \left(4t-\frac{1}{2}t^2\Big|_2^x\right) = 2+\left(4x-\frac{1}{2}x^2\right)-(8-2)$$

$$= 4x-\frac{1}{2}x^2-4$$

그러므로 구하고자 하는 함수는 다음과 같다.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & , \ 0 \le x \le 2 \\ 4x - \dfrac{1}{2}x^2 - 4 & , \ 2 < x \le 4 \end{cases}$$

(b)



(c) $x = 2$에서 첨점을 가지므로 $x \neq 2$인 모든 $0 < x < 4$에서 미분 가능하다.

(d) $x = 2$에서 좌측 미분계수는 $g_-(2) = x \Big|_{x=2} = 2$이고 우측 미분계수는 $g_-(2) = 4 - 2x \Big|_{x=2} = 2$이므로 $x = 2$에서 $g(x)$는 미분 가능하다. 따라서 $g(x)$는 모든 $0 < x < 4$에서 미분 가능하다.

23.

풀이 $f_{\text{av}} = \dfrac{1}{3-1}\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}x^4 \Big|_1^3\right) = 10$

$\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx = \dfrac{1}{4}x^4 \Big|_1^3 = 20 = 2c^3;\ c^3 = 10;\ c = \sqrt[3]{10}$

25.

풀이 $\lim_{x \to 0} x = 0$, $\lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4} dt = 0$이므로 0/0 형태의 부정형이다. 로피탈의 정리에 의하여 구하고자 하는 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4} dt = \lim_{x\to0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{1+t^4} dt}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^4} dt}{2x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{x^2}{1+x^4}}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{2x^3}{1+x^4} = 0$$

27.

풀이 적분의 평균값 정리에 의하여 함수 f가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면 $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$를 만족하는 c가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다. 따라서 조건에 의하여 $f(c)(b-a)=0$을 만족하는 c가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다. 이와 같은 c에 대하여 $b-a \neq 0$이므로 $f(c)=0$이어야 한다. 즉, $f(c)=0$을 만족하는 c가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다.

29.

풀이 $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)dt = 2xf(x^2) = \frac{d}{dx}(x^3 + \ln x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$

$$f(x^2) = \frac{1}{2x}\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x^2}$$

$x^2 = t$라 하면, $x>0$이므로 $x = \sqrt{t}$이고 $f(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{1}{2t}$, 즉 $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2x}$이다.

31.

풀이 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{2x^2} f(t)\,dt = 4xf(2x^2) = \dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{1+x^2} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$;

$4xf(2x^2) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; $f(2x^2) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

$2x^2 = t$라 하면, $x^2 = t/2$이므로

$$f(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+(t/2))^2} = -\frac{2}{(2+t)^2},\ \text{즉}\ f(x) = -\frac{2}{(2+x)^2}$$

33.

풀이 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi\sin(k\pi/n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\frac{\pi}{n} = \int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$$= -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(-1)-(-1) = 2$$

35.

풀이 (a) $C'(t) = \dfrac{1}{t^2}\left[\left(\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t [f(x)+g(x)]\,dx\right)t - \int_0^t [f(x)+g(x)]\,dx\right]$

$$= \frac{1}{t^2}\left([f(t)+g(t)]t - \int_0^t [f(x)+g(x)]\,dx\right)$$

이고 C의 임계점은 $C'(t)=0$을 만족하는 t이므로

$$C'(t) = \frac{1}{t^2}\left([f(t)+g(t)]t - \int_0^t [f(x)+g(x)]\,dx\right) = 0$$

을 만족한다. 즉,

$$[f(t)+g(t)]t - \int_0^t [f(x)+g(x)]\,dx = 0$$

$$f(t)+g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(x)+g(x)]\,dx = C(t)$$

을 만족한다. 그러므로 구하고자 하는 임계점은 $C(t) = f(t)+g(t)$를 만족하는 t이다.

(b) $0 \le t \le 30$에서

$$D(t_0) = \int_0^{t_0} f(x)\,dx = \int_0^{t_0} \left(\frac{v}{15} - \frac{v}{450} x \right) dx = \frac{v}{15} x - \frac{v}{900} x^2 \Big|_0^{t_0} = \frac{v}{15} t_0 - \frac{v}{900} t_0^2 = 0$$

이므로

$$\frac{1}{15} t_0 - \frac{1}{900} t_0^2 = 1;\ 60 t_0 - t_0^2 = 900;\ t_0^2 - 60 t_0 + 900 = 0;\ (t_0 - 30)^2 = 0;\ t_0 = 30$$

이다.

(c) $f(t) = \begin{cases} \frac{v}{15} - \frac{v}{450} t, & 0 \le t \le 30 \\ 0 & , t > 30 \end{cases}$, $g(t) = \frac{vt^2}{12900}$, $t > 0$이므로 $0 \le t \le 30$에서

$$f(t) + g(t) = \frac{v}{12900} t^2 - \frac{v}{450} t + \frac{v}{15}$$

이고 C의 최솟값은 $C(t) = f(t) + g(t)$를 만족하는 t이므로

$$C(t) = \frac{v}{12900} t^2 - \frac{v}{450} t + \frac{v}{15} = \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{v}{12900} x^2 - \frac{v}{450} x + \frac{v}{15} \right) dx$$

를 만족하는 t를 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{v}{12900} t^2 - \frac{v}{450} t + \frac{v}{15} &= \frac{1}{t} \left(\frac{v}{38700} t^3 - \frac{v}{900} t^2 + \frac{v}{15} t \right) \\ &= \frac{v}{38700} t^2 - \frac{v}{900} t + \frac{v}{15} \end{aligned}$$

$$\frac{t\,(2t - 43)}{38700} = 0;\ t = \frac{43}{2}$$

따라서 C의 최솟값은 다음과 같다.

$$C\left(\frac{43}{2} \right) = \frac{v}{12900} t^2 - \frac{v}{450} t + \frac{v}{15} \Big|_{t = 43/2} = \frac{197v}{3600}$$

Section 4.2 연습문제

1.

풀이 $u=2x+2$이라 하면, $\dfrac{du}{dx}=2$, $dx=\dfrac{1}{2}du$이므로

$$\int (2x+1)^5\,dx=\int u^5\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}u^6+C=\frac{1}{12}(2x+1)^6+C$$

3.

풀이 $u=3x+1$이라 하면, $\dfrac{du}{dx}=3$, $dx=\dfrac{1}{3}du$이므로

$$\int e^{3x+1}\,dx=\int e^u\frac{1}{3}\,du=\frac{1}{3}e^u+C=\frac{1}{3}e^{3x+1}+C$$

5.

풀이 $u=\ln x$라 하면, $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x}dx=du$이므로

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|\ln x|+C$$

7.

풀이 $u=x^2+1$이라 하면, $\dfrac{du}{dx}=2x$, $x\,dx=\dfrac{1}{2}du$이므로

$$\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{1}{u^2}\,\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\right)+C=-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$$

9.

풀이 $u=2x$라 하면, $\dfrac{du}{dx}=2$, $dx=\dfrac{1}{2}du$이므로

$$\int\sec 2x\tan 2x\,dx=\int\sec u\tan u\,\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{2}\sec u+C=\frac{1}{2}\sec 2x+C$$

11.

풀이 $u=3x+2$라 하면, $\dfrac{du}{dx}=3$, $dx=\dfrac{1}{3}du$이므로

$$\int \sqrt{3x+2}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right)+C = \frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$$

13.

풀이 $\displaystyle\int x\sin x\,dx = -x\cos x+\sin x+C$

15.

풀이 $$\int (x^2-x+1)e^{-x}\,dx = -(x^2-x+1)e^{-x}-(2x-1)e^{-x}-2e^{-x}+C$$
$$= -(x^2+x+2)e^{-x}+C$$

17.

풀이 $$\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx + C$$
$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$$

19.

풀이 $$\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\cdot x^3\,dx = \frac{x^3}{9}(-1+3\ln x)+C$$

21.

풀이 $$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -(\ln x)\frac{1}{x} - \int\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right)dx = -(\ln x)\frac{1}{x}+\int\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$= -(\ln x)\frac{1}{x}-\frac{1}{x} = -\frac{1+\ln x}{x}$$

23.

풀이 $\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1}x - \int \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot x\,dx = x\cos^{-1}x - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$이고

$u = 1-x^2$이라 하면, $-x\,dx = \frac{1}{2}\,du$이므로

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

이다. 따라서 구하고자 하는 적분은 다음과 같다.

$$\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$$

25.

풀이 $u = \sec x$, $v' = \sec^2 x$이라 하면, $u' = \sec x \tan x$, $v = \tan x$이므로

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x \tan x - \int (\sec x \tan x)\tan x\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx\end{aligned}$$

이다. 그러므로 좌변과 우변을 정리하면

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x\,dx$$

이고, $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C_1$이므로, 구하고자 하는 부정적분은

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C, \qquad C = \frac{1}{2}C_1$$

이다.

27.

풀이 $\dfrac{x^3+x-1}{x^2+1}=x-\dfrac{1}{x^2+1}$이므로 구하고자 하는 적분은 다음과 같다.

$$\int\frac{x^3+x-1}{x^2+1}dx=\int\left(x-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\tan^{-1}x+C$$

29.

풀이 $\dfrac{x^3-2}{x^2-1}=x+\dfrac{x-2}{(x-1)(x+1)}=x+\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$라 놓고 미정계수 A, B를 구하기 위하여 우변을 통분하면 다음 항등식을 얻는다.

$$(A+B)x+(A-B)=x-2$$

따라서 $A=1$, $B-2A=0$, $A-B+C=1$이므로 $A=-\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{3}{2}$이다. 그러므로 피적분 함수의 부정적분은

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3-2}{x^2-1}dx&=\int\left(x-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2}\frac{1}{x+1}\right)dx\\&=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+1|+C\\&=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)^3}{x-1}\right|+C\end{aligned}$$

31.

풀이 $\dfrac{x^4+16}{x(x^2+4)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$라 놓고 미정계수를 구하기 위하여 우변을 통분하면 다음 항등식을 얻는다.

$$(A+B)x^4+Cx^3+(8A+4B+D)x^2+(4C+E)x+16A=x^4+16$$

따라서 $A+B=1$, $C=0$, $8A+4B+D=0$, $4C+E=0$, $16A=16$이므로 $A=1$, $B=0$, $C=0$, $D=-8$, $E=0$이다. 그러므로 구하고자 하는 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \frac{x^4+16}{x(x^2+4)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{8x}{(x^2+4)^2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{4(2x)}{(x^2+4)^2}\right)dx$$

$$= \ln|x| + \frac{4}{x^2+4} + C$$

33.

풀이 $\int \cos^6 x\,dx = \int (\cos^2 x)^3\,dx = \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx$

$$= \frac{1}{8}\int (1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x+\frac{3}{2}\sin 2x+3\int \cos^2 2x\,dx+\int \cos^3 2x\,dx\right)$$

이고

$$\int \cos^2 2x\,dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x + C_1$$

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int \cos^2 2x\cos 2x\,dx = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx \qquad (u=2x)$$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 u)\cos u\,du \qquad (t=\sin u)$$

$$= \frac{1}{2}\int (1-t^2)\,dt = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)+C_2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+C_2$$

이므로 구하고자 하는 적분은 다음과 같다.

$$\int \cos^6 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x+2\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+C$$

35.

풀이 $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{8} \int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 \, dx$

$$= \frac{1}{8} \int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + C$$

37.

풀이 $\int \cot^3 x \, dx = \int \cot x \cot^2 x \, dx = \int \cot x \, (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx$

$$= \int \cot x \sec^2 x \, dx - \int \cot x \, dx$$

$$= \int \cot x \sec^2 x \, dx - \ln|\sin x|$$

이제 $u = \cot x$라 하면 $\frac{du}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$, 즉 $du = -\operatorname{cosec}^2 x \, dx$이므로

$$\int \cot x \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \int u(-1) du = -\frac{1}{2} u^2 + C = -\frac{1}{2} \cot^2 x + C$$

이고, 구하고자 하는 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \cot^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \cot^2 x - \ln|\sin x| + C$$

39.

풀이 $\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$이므로

$$\sin x \cos 3x \sin 5x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)\sin 5x = \frac{1}{2}(\sin 4x \sin 5x - \sin 2x \sin 5x)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos x - \cos 9x - \cos 3x + \cos 7x)$$

이고 따라서 구하고자 하는 적분은 다음과 같다.

$$\int \sin x \cos 3x \sin 5x\, dx = \frac{1}{4}\int (\cos x - \cos 9x - \cos 3x + \cos 7x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{7}\sin 7x - \frac{1}{9}\sin 9x\right) + C$$

41.

풀이 $\tan \frac{x}{2} = t$ 라 하면, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\frac{dx}{1-\cos x} = \frac{1}{t^2}dt$이므로

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t} + C = -\left(\tan \frac{x}{2}\right)^{-1} + C = -\cot \frac{x}{2} + C$$

43.

풀이 $\tan x = t$ 라 하면, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$ 이므로

$\dfrac{dx}{\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \dfrac{1}{1-2t^2}dt$이다. 따라서 구하고자 하는 적분은 다음과 같다.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \int \frac{1}{1-2t^2}dt = \int \frac{1}{(1-\sqrt{2}\,t)(1+\sqrt{2}\,t)}dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\ln|1-\sqrt{2}\,t| + \ln|1+\sqrt{2}\,t|) + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\,t}{1-\sqrt{2}\,t}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\tan x}{1-\sqrt{2}\tan x}\right| + C$$

45.

풀이 $\sqrt{2-x} = t$라 하면 $x = 2-t^2$, $dx = -2t\,dt$이고 $x-1 = 1-t^2$이므로

$$\int \frac{x}{(x-1)\sqrt{2-x}}dx = \int \frac{2-t^2}{t\,(1-t^2)}(-2t)\,dt = (-2)\int \frac{2-t^2}{1-t^2}dt$$

$$= (-2)\int\left(1+\frac{1}{(1-t)(1+t)}\right)dt$$

$$= (-2)\int\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= (-2)\left(t-\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln|1+t|\right)+C$$

$$= -2t - \ln\left|\frac{1+t}{1+t}\right| + C$$

$$= -2\sqrt{2-x} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{2-x}}{1+\sqrt{2-x}}\right| + C$$

47.

풀이 $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}=t$라 하면 $x=\dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{-8t}{(1+t^2)^2}dt$이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{2(1-t^2)}(t)\frac{-8t}{(1+t^2)^2}dt = -2\int\left(\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt \\ &= \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt+2\int\frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \ln|t-1|-\ln|t+1|+2\tan^{-1}t+C \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}\right|+2\tan^{-1}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}+C\end{aligned}$$

49.

풀이 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$이므로 $x-1=\tan\theta$라 하면, $dx=\sec^2\theta\,d\theta$, $\sqrt{x^2-2x+2}=\sec\theta$이다.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}=\int\frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}d\theta=\int\sec\theta\,d\theta$$

이고, 한편 $\sec x$의 부정적분을 이용하면,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$

이다. 한편 $x-1=\tan\theta$이므로 $\sec\theta=\sqrt{x^2-2x+2}$이고 따라서 구하고자 하는 부정적분은 다음과 같다.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}=\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right|+C$$

51.

풀이 $\int_{0}^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx = \int_{1}^{0} t^2 (-1)\, dt = \int_{0}^{1} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{3}$

53.

풀이 $\tan\frac{x}{2} = t$ 라 하면, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ 이므로

$$\frac{\cos x}{\sin x\,(1+\cos x)} = \frac{(1-t^2)/(1+t^2)}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)$$

이고, 따라서

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x\,(1+\cos x)} dx = \frac{1}{2}\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \left(\frac{1}{t} - t\right) dt = -\frac{1}{6} + \frac{\ln 3}{4}$$

55.

풀이 $x = \sin t$ 라 하면, $dx = \cos t\, dt$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ 이므로

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \int_{0}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left.\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\,\right|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

57.

풀이 $2x = \sin t$ 라 하면, $dx = \frac{1}{2}\cos t\, dt$, $\sqrt{1-4x^2} = \cos t$ 이므로

$$\int_{0}^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int_{0}^{\pi/6} \frac{1}{\cos t}\,\frac{1}{2}\cos t\, dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

59.

풀이 $u=\cos^{n-1}x$, $v'=\cos x$라 하면, $u'=-(n-1)\cos^{n-2}x\,1\sin x$, $v=\sin x$이므로

$$\begin{aligned}\int\cos^n x\,dx &= \cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx\\ &= \cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx\\ &= \cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\cos^n x\,dx\end{aligned}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$n\int\cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx$$

$$\int\cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$$

Section 4.3 연습문제

1.

풀이 $$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1}x\,\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}b = \frac{\pi}{2}$$

3.

풀이 $$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}e^x\,\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\tan^{-1}e^b - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

5.

풀이 $$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{(\ln b)^2}{2} = \infty$$

7.

풀이 $$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\sin x\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)\right)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-b}(\cos b+\sin b)\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{(압축정리에 의하여)}$$

9.

풀이 $$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2\,\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}(\tan^{-1}b)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

11.

풀이 (a) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lim_{a \to \infty} \int_{0}^{a} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{a \to \infty} e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{a} = \lim_{a \to \infty} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = 1$$

이므로 $f(x)$는 확률밀도함수이다.

(b) $\mu = \int_{0}^{\infty} x f(x)\,dx = \lim_{a \to \infty} \int_{0}^{a} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{a \to \infty} \left(- \frac{\lambda x - 1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \Big|_{0}^{a}$

$$= \frac{1}{\lambda} \lim_{a \to \infty} \left(1 - (\lambda a - 1) e^{-\lambda a}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \lim_{a \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda a - 1}{e^{\lambda a}}\right) = \frac{1}{\lambda} - \lim_{a \to \infty} \frac{1}{e^{\lambda a}} = \frac{1}{\lambda}$$

(c) $m = \int_{0}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \lim_{a \to \infty} \int_{0}^{a} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{a \to \infty} \left(- \frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right) \Big|_{0}^{a}$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \lim_{a \to \infty} \left(2 - (\lambda^2 x^2 + 2\lambda a - 2) e^{-\lambda a}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \lim_{a \to \infty} \left(2 - \frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda a - 2}{e^{\lambda a}}\right) = \frac{2}{\lambda^2}$$

(d) $\sigma^2 = m - \mu^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

13.

풀이 [연습문제 5]와 [예제 4-33]에 의하여 명백히 성립한다.

15.

풀이 $\ln x = t$라 하면,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^p} = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^b \frac{dt}{t^p}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}t^{1-p}\Big|_{\ln 2}^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}\right)$$

이므로 $p<1$일 때 수렴한다.

17.

풀이 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\ln(x^2+1)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\ln(b^2+1) = \infty$이므로

$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \infty$이다. 그러나

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\ln(x^2+1)\Big|_{-a}^a = \lim_{a\to\infty}\ln\frac{a^2+1}{(-a)^2+1} = \lim_{a\to\infty}\ln 1 = 0$$

이다. 따라서 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{1+x^2} \neq \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a \frac{2x\,dx}{1+x^2}$이다.

19.

풀이 (a) 로피탈의 정리를 n번 반복하면 다음과 같이 명백히 성립한다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

(b) 유한구간 $[1,M]$에서 피적분함수 $x^{n-1}e^{-x}$은 연속이므로 $\int_1^M x^{n-1}1e^{-x}\,dx$는 존재한다. 한편 $x\ge M$일 때 $0<\frac{x^{n-1}}{e^x}\le\frac{1}{x^2}$이고 [예제 4-33]에 의하여 $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\,dx$이 수렴하므로 $\int_M^\infty\frac{1}{x^2}\,dx$도 수렴한다. 따라서 [정리 4-9]에 의하여 $\int_M^\infty x^{n-1}1e^{-x}\,dx$는 수렴한다. 따라서

$$\int_1^\infty x^{n-1}1e^{-x}\,dx=\int_1^M x^{n-1}1e^{-x}\,dx+\int_M^\infty x^{n-1}1e^{-x}\,dx$$

도 역시 수렴한다.

21.

풀이 x마일 떨어진 우주선에 지구가 미치는 힘이 $F(x)=-\frac{k}{x^2}$이므로 우주선을 들어올리기 위하여 중력장과 반대 방향으로 이만큼의 힘이 필요하다. 즉, 우주선을 들어 올리는데 필요한 힘은 $F(x)=\frac{k}{x^2}$이고, 지구 반지름을 벗어나야 하므로 $x=3960$마일이고 힘은 $F=1000$ (lb)이므로 $k=F\cdot x^2=1000\,(3960)^2\approx1.568\times10^{10}$이다. 그러므로 우주선을 지구의 중력장 밖으로 이탈시킬 때 한 일의 양은 다음과 같다.

$$W=(1.568\times10^{10})\int_{3960}^\infty\frac{1}{x^{26}}\,dx=\lim_{a\to\infty}(1.568\times10^{10})\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{3960}^b$$

$$=\lim_{a\to\infty}(1.568\times10^{10})\left(\frac{1}{3690}-\frac{1}{a}\right)=\frac{1.568\times10^{10}}{3690}\approx\ 3.96\times10^6\ (\mathrm{N})$$

Section 4.4 연습문제

1.

풀이 $S=2\int_0^1 (x^2-(-x^4))\,dx=2\int_0^1 (x^2+x^4)\,dx=2\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{16}{15}$

3.

풀이 $S=\int_0^{\pi}\sin x\,(1-\cos x)\,dx=-\cos x+\frac{\cos^2 x}{2}\Big|_0^{\pi}=2$

5.

풀이 교점의 x좌표 : $x=0,\ x=\pm\sqrt{6}$

$$S=2\int_0^{\sqrt{6}}[x^2-(x^4-4x^2)]\,dx=2\int_0^{\sqrt{6}}(5x^2-x^4)\,dx=2\left(\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^{\sqrt{6}}=\frac{28\sqrt{6}}{5}$$

7.

풀이 교점의 x좌표 : $x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$

$$S=\int_0^{\pi/2}\left[\cos x-\left(1-\frac{2}{\pi}x\right)\right]dx=\sin x-x+\frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi/2}=1-\frac{\pi}{4}$$

9.

풀이 교점의 x좌표 : $x=0,\ x=1$

$$S=\int_0^1(\sqrt[3]{x}-x^2)\,dx=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{5}{12}$$

11.

풀이 $V=\pi\int_0^2(-x+2)^2\,dx=\pi\left(4x-2x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{8\pi}{3}$

13.

풀이 $V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4 = \frac{3\pi}{4}$

15.

풀이 $V = \pi \int_0^1 1^2 dx + \pi \int_1^2 [1^2 - (y-1)] dx$

$= \pi + \pi\left(2y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

17.

풀이 (a) $y=2$를 중심으로 회전한 회전체는 $y = \sqrt{x} - 2$를 $0 \le x \le 4$에서 x축을 중심으로 회전한 회전체와 동일하다.

$$V = \pi \int_0^4 y^2\, dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x} - 2)^2\, dy = \frac{\pi}{6} x (24 - 16\sqrt{x} + 3x)\Big|_0^4 = \frac{8\pi}{3}$$

(b) $x=4$를 중심으로 회전한 회전체는 $x=4$, $x=y^2-4$로 둘러싸인 부분을 $0 \le y \le 2$에서 y축을 중심으로 회전한 회전체와 동일하다.

$$V = \pi \int_0^2 \left[(-4)^2 - (y^2-4)^2\right] dy = \pi\left(\frac{8}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^2 = \frac{224\pi}{15}$$

19.

풀이 $V = 2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} x\,(x^2 - 2x^4)\, dx = 2\pi\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^6 \Big|_0^{1/\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{48}$

21.

풀이 $V = 2\pi \int_0^{\pi} x\,[\sin x - (-\sin x)]\, dx = 4\pi \int_0^{\pi} x \sin x\, dx$

$= 4\pi\left(-x\cos x + \sin x \Big|_0^{\pi}\right) = 4\pi^2$

23.

풀이 $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+9x}$ 이므로

$$l = \int_0^9 \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \frac{2}{27}(1+9x)^{3/2}\Big|_0^9 = \frac{164\sqrt{82}}{27} - \frac{2}{27} = \frac{2}{27}(-1+82\sqrt{82})$$

25.

풀이 (c) $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\cot^2 x} = \operatorname{cosec} x$이므로

$$l = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{cosec} x\, dx = -\ln\left|\operatorname{cosec} x + \cot x\right|\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= -\ln(-1+\sqrt{2}) + \ln(1+\sqrt{2}) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right)$$

27.

풀이 $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \cosh x$이므로

$$l = \int_0^2 \cosh x\, dx = \sinh x\,\Big|_0^2 = \sinh 2$$

29.

풀이 $\dfrac{dx}{dt} = -6\cos^2 t \sin t,\ \dfrac{dy}{dt} = 6\cos t \sin^2 t$이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(-6\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(6\cos t \sin^2 t\right)^2 = 36\cos^2 t \sin^2 t$$

이다. 따라서 구하고자 하는 곡선의 길이는 다음과 같다.

$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^2 t \sin^2 t}\, dt = 24\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t\, dt$$

$$= 24\int_0^1 u\, du = 12u^2\,\Big|_0^1 = 12$$

31.

풀이 $y' = 3x^2$이므로 $y\sqrt{1+(y')^2} = x^3\sqrt{1+9x^4}$ 이다.

$$A = 2\pi\int_0^2 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{\pi}{18}\int_0^2 (36x^3)\sqrt{1+9x^4}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{18}\int_1^{145}\sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{27}u\sqrt{u}\,\Big|_1^{145} = \frac{\pi}{27}(-1+145\sqrt{145}\,)$$

33.

풀이 게이블의 중심을 원점이라 하면, $x=5$일 때 $y=4$이므로 $y=\frac{4}{25}x^2$이므로 $1+(y')^2 = 1+\left(\frac{8}{25}x\right)^2$이다. 따라서 케이블의 길이는 다음과 같다.

$$l = 2\int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{8}{25}x\right)^2}\,dx$$

$$= 2\left(\frac{x}{50}\sqrt{625+64x^{26}} + \frac{25}{16}\sinh^{-1}\frac{8x}{25}\right)\Big|_0^5 = \sqrt{89} + \frac{25}{8}\sinh^{-1}\frac{8}{5}$$