Section 10.1 연습문제

1.

풀이 $y' = 1+y^2$; $\dfrac{dy}{dx} = 1+y^2$; $\dfrac{1}{1+y^2}dy = dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int 1\,dx$;

$\tan^{-1}y = x + C$; $y = \tan(x+C)$

3.

풀이 $\dfrac{dy}{dx} - 2y + 3 = 0$; $\dfrac{dy}{dx} = 2y-3$; $\dfrac{1}{2y-3}dy = dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{2y-3}dy = \int 1\,dx$;

$\dfrac{1}{2}\ln|2y-3| = x + C_1$; $\ln|2y-3| = 2x + C$

5.

풀이 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}-y}{x}$; $\dfrac{1}{\sqrt{y}-y}dy = \dfrac{1}{x}dx$; $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{y}-y}dy = \int \frac{1}{x}dx$;

$\displaystyle 2\int \frac{1}{2\sqrt{y}\left(1-\sqrt{y}\right)}dy = \ln|x| + C_1$; $u = 1-\sqrt{y}$ 라 하면, $du = -\dfrac{1}{2\sqrt{y}}dy$ 이므로

$$-2\int \frac{1}{u}du = \ln|x| + C_1 \ ; \ -2\ln|u| = \ln|x| + C_1 \ ; \ -2\ln|1-\sqrt{y}| = \ln|x| + C_1 \ ;$$

$$2\ln|1-\sqrt{y}| + \ln|x| = -C_1 \ ; \ x\left(1-\sqrt{y}\right)^2 = C$$

7.

풀이 $2x^3y' = y^3 + 2x^2y$; $2y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $v = \dfrac{y}{x}$라 하면, $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$이므로

$2\dfrac{dy}{dx} = 2v + 2x\dfrac{dv}{dx} = v^3 + 2v$; $\dfrac{2}{v^3}dv = \dfrac{1}{x}dx$; $\displaystyle\int \frac{2}{v^3}dv = \int \frac{1}{x}dx$; $-\dfrac{1}{v^2} = \ln|x| + C$;

$-\dfrac{x^2}{y^2} = \ln|x| + C$; $x^2 + y^2\ln|x| + Cy^2 = 0$

9.

풀이 $x^2y' = xy - y^2$; $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$; $v = \frac{y}{x}$라 하면, $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$이므로
$v + x\frac{dv}{dx} = v - v^2$; $\frac{1}{v^2}dv = -\frac{1}{x}dx$; $\int \frac{1}{v^2}dv = -\int \frac{1}{x}dx$; $-\frac{1}{v} = -\ln|x| + C$;
$-\frac{x}{y} = -\ln|x| + C$; $x = y\ln|x| + Cy$

11.

풀이 $M(x,y) = \frac{2xy+1}{y}$, $N(x,y) = \frac{y-x}{y^2}$이라 하면, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$이므로 주어진 방정식은 완전 미분방정식이다. $\int_1^x \frac{2ty+1}{y}dt + \int_1^y \left[\frac{t-x}{t^2}\right]_{x=1} dt = C_1$;
$\frac{x^2y+x-y-1}{y} + \frac{1-y}{y} + \ln y = C_1$; $\frac{x^2y+x}{y} + \ln y = C$

13.

풀이 $M(x,y) = \frac{1}{x^3y^2}$, $N(x,y) = \frac{1}{x^2y^3} + 2y$ 라 하면, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2}{x^3y^3}$이므로 주어진 방정식은 완전 미분방정식이다. $\int_1^x \frac{1}{t^3y^2}dt + \int_1^y \left[\frac{1}{x^2t^3} + 2t\right]_{x=1} dt = C_1$;
$\frac{1}{2y^2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{2y^4-1}{2y^2} = C_1$; $2y^2 - \frac{1}{x^2y^2} = C$

15.

풀이 $M(x,y)=y\cos x$, $N(x,y)=2\sin x$ 라 하면, $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\cos x$, $\dfrac{\partial N}{\partial y}=2\cos x$ 이므로

$$F(x,y)=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}=-\frac{\cos x}{2\sin x}$$

이고, 따라서 적분인자는 다음과 같다.

$$\lambda(x,y)=\exp\left[-\int\frac{\cos x}{2\sin x}dx\right]=\sin^{-1/2}x$$

주어진 식의 양변에 $\sin^{-1/2}x$ 를 곱하여 완전미분형 $y\cos x\sin^{-1/2}x\,dx+2\sin^{1/2}x\,dy=0$을 얻는다. 그러면 주어진 미분방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$\int_1^x y\cos t\sin^{-1/2}t\,dt+\int_0^y\left[2\sin^{1/2}x\right]_{x=1}dt=C_1;\quad 2y\sin^{1/2}x=C_1;\ y^2\sin x=C$$

$$\int_0^x 2\cos t\,dt+\int_0^y\left[\cos t\right]_{x=0}dt=C;\quad 2\sin x+\sin y=C$$

17.

풀이 $\dfrac{1}{x}dx+dy=0$; $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx+\int 1\,dy=C$; $\ln|x|+y=C$; $\ln 1+1=C$; $C=1$; $\ln|x|+y=1$

19.

풀이 $\dfrac{dy}{dx}=y-y^2$; $\dfrac{1}{y(1-y)}dy=dx$; $\displaystyle\int\frac{1}{y(1-y)}dy=\int 1\,dx$;

$\ln|y|-\ln|1-y|=x+C_1$; $\ln\left|\dfrac{y}{1-y}\right|=x+C_1$; $\dfrac{y}{1-y}=Ce^x$; $\dfrac{-1}{1-(-1)}=C$;

$C=-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{y}{1-y}=-\dfrac{1}{2}e^x$; $2y=-(1-y)e^x$; $y=\dfrac{e^x}{-2+e^x}$

21.

풀이 $\frac{y}{x}+\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]y'=0$; $v=\frac{y}{x}$라 하면, $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$이므로

$v+(1+v^4)\left(v+x\frac{dv}{dx}\right)=0$; $\frac{1+v^4}{2v+v^5}dv=-\frac{1}{x}dx$; $\int\frac{1+v^4}{2v+v^5}dv=-\int\frac{1}{x}dx$;

$\frac{1}{2}\ln|v|+\frac{1}{8}\ln(2+v^4)=-\ln|x|+C_1$; $\ln\left[v^4(2+v^4)x^8\right]=8C_1$;

$\left(\frac{y}{x}\right)^4\left[2+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]x^8=8C_1$; $y^4(2x^4+y^4)=C$; $1\cdot(0+1)=C$; $C=1$; $y^4(2x^4+y^4)=1$

23.

풀이 $x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$, $y(1)=2$; $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}$; $v=\frac{y}{x}$라 하면, $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$이므로 $v+x\frac{dv}{dx}+v=2\sqrt{v}$; $x\frac{dv}{dx}=-2(v-\sqrt{v})$; $\frac{1}{v-\sqrt{v}}dv=-\frac{1}{x}dx$;

$\int\frac{1}{v-\sqrt{v}}dv=-\int\frac{1}{x}dx$; $\ln\left|-1+\sqrt{v}\right|=-\ln|x|+C_1$; $(-1+\sqrt{v})x=C$;

$\left(-1+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)x=C$; $\sqrt{xy}=C+x$; $\sqrt{2}=C+1$; $C=1-\sqrt{2}$; $\sqrt{xy}=x+1-\sqrt{2}$

25.

풀이 주어진 방정식을 $3x^2y\,dx+(x^3+2y^4)dy=0$으로 변경하여, $M(x,y)=3x^2y$, $N(x,y)=x^3+2y^4$이라 하면, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=3x^2$이므로 주어진 방정식은 완전 미분방정식이다. $\int_0^x 3t^2y\,dt+\int_0^y\left[x^3+2t^4\right]_{x=0}dt=C_1$; $x^3y+\frac{2}{5}y^5=C_1$; $5x^3y+2y^5=C$; $y(0)=0$이므로 $C=0$; $5x^3y+2y^5=0$

27.

풀이 $M(x,y)=2xy$, $N(x,y)=3$라 하면, $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial N}{\partial y}=0$이므로

$$F(x,y)=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=-\frac{1}{y}$$

이고, 따라서 적분인자는 $\lambda(x,y)=\exp\left[-\int\frac{1}{y}dy\right]=\frac{1}{y}$이다. 그러므로 주어진 방정식의 양변에 $\frac{1}{y}$을 곱하여 완전미분형 $2x\,dx+\frac{3}{y}dy=0$을 얻는다. 그러면 주어진 미분방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$\int_0^x 2t\,dt+\int_1^y\left[\frac{3}{t}\right]_{x=0}dt=C;\quad x^2+3\ln y=C$$

한편 $y(3)=1$이므로 $C=9$; $x^2+3\ln y=9$

29.

풀이 $M(x,y)=\cos x\sin x-xy^2$, $N(x,y)=y(1-x^2)$이라 하면, $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=-2xy$이므로 주어진 방정식은 완전 미분방정식이다.

$$\int_0^x(\cos t\,\sin t-t\,y^2)\,dt+\int_1^y\left[t\,(1-x^2)\right]_{x=0}dt=C_1\ ;$$
$$\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{2}(y^2-1)=C_1\ ;\ y^2(1-x^2)+\sin^2 x=C;\ C=4;$$

$$y^2(1-x^2)+\sin^2 x=4$$

31.

풀이 주어진 방정식을 $y' + \frac{x}{x^2-4}y = \frac{x}{x^2-4}$ 으로 변형하고, $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, $r(x) = \frac{x}{x^2-4}$ 이라 한다. 그러면 $\int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4)$이므로

$$y = \exp\left[-\frac{1}{2}\ln(x^2-4)\right] \cdot \left[\int \frac{x}{x^2-4}\exp\left(\frac{1}{2}\ln(x^2-4)\right)dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\left[\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\left[\sqrt{x^2-4} + C\right] = 1 + \frac{C}{\sqrt{x^2-4}}$$

따라서 구하고자 하는 해는 $y = 1 + \frac{C}{\sqrt{x^2-4}}$ 이다.

33.

풀이 주어진 방정식을 $y' + \frac{1}{x}y = x\sin x$ 로 변형하고, $f(x) = \frac{1}{x}$, $r(x) = x\sin x$ 라 한다. 그러면 $\int f(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$ 이므로

$$y = \exp[-\ln x] \cdot \left[\int x\sin x\,\exp(\ln x)\,dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\int x^2\sin x\,dx + C\right] = \frac{1}{x}\left[2x\sin x - (x^2-2)\cos x + C\right]$$

따라서 구하고자 하는 해는 $xy = 2x\sin x - (x^2-2)\cos x + C$이다.

35.

풀이 주어진 방정식을 $y' + \frac{1}{x-2}y = 3x$ 로 변형하고, $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $r(x) = 3x$ 라 하면,

$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x-2}dx = \ln(x-2)$이므로

$$y = \exp(-\ln(x-2))\left[\int 3x \exp[\ln(x-2)]\,dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{x-2}\left[\int 3x(x-2)\,dx + C\right] = \frac{1}{x-2}\left(x^3 - 3x^2 + C\right)$$

따라서 구하고자 하는 일반해는 $y(x-2) = x^3 - 3x^2 + C$이고, $y(3) = 4$이므로 $C = 4$이고 $y(x-2) = x^3 - 3x^2 + 4$ 이다.

37.

풀이 (a) $L = 3$, $R = 12$, $e(t) = 30$이므로 다음 선형미분방정식을 얻는다.

$$3\frac{di}{dt} + 12i = 30 \text{ 또는 } \frac{di}{dt} + 4i = 10$$

$f(t) = 4$, $r(t) = 10$이라 하면, $\int f(t)\,dt = \int 4dt = 4t$이므로 전류 i에 대한 일반해는 다음과 같다.

$$i(t) = e^{-4t}\left(\int 10e^{4t}\,dt + C\right) = e^{-4t}\left(\frac{5}{2}e^{4t} + C\right) = \frac{5}{2} + Ce^{-4t}$$

한편 $i(0) = 0$이므로 $\frac{5}{2} + C = 0$, 즉 $C = -\frac{5}{2}$이고, 따라서 구하고자 하는 전류는 $i(t) = \frac{5}{2}(1 - e^{-4t})$이다.

(b) $\lim_{t \to \infty} i(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{5}{2}(1 - e^{-4t}) = \frac{5}{2}$

Section 10.2 연습문제

1.

풀이 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $D^2-3D+2=(D-1)(D-2)=0$이고, 따라서 특성근은 $D=1$ 또는 $D=2$이다. 그러므로 일반해는 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$이다.

3.

풀이 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $D^2+10D+21=(D+3)(D+7)=0$이고, 따라서 특성근은 $D=-3$ 또는 $D=-7$이다. 그러므로 일반해는 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-7x}$이다.

5.

풀이 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $D^2-2D+1=(D-1)^2=0$이고, 따라서 특성근은 $D=1$(중근)이다. 그러므로 일반해는 $y=(C_1+C_2x)e^x$이다.

7.

풀이 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $D^2+6D+9=(D+3)^2=0$이고, 따라서 특성근은 $D=-3$(중근)이므로 일반해는 $y=e^{-3x}(C_1+C_2x)$이다.

9.

풀이 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $D^2+2D+2=0$이고, 따라서 특성근은 $D=-1\pm i$이므로 일반해는 $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$이다.

11.

풀이 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $D^2+2D+3=0$이고, 따라서 특성근은 $D=-1\pm i\sqrt{2}$이므로 일반해는 $y=e^{-x}\left(C_1\cos\sqrt{2}\,x+C_2\sin\sqrt{2}\,x\right)$이다.

13.

풀이 주어진 미분방정식의 특성방정식은 $D^2-4D+13=0$이고, 따라서 특성근은 $D=2\pm 3i$이므로 일반해는 $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$이다.

15.

풀이 먼저 $y''-y'-2y=0$의 일반해 y_h를 구하기 위하여 특성근을 먼저 구한다. 특성방정식 $D^2-D-2=0$으로부터 $D=-1, 2$이므로 여방정식의 해는 $y_h=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$이다. 이제 특수해를 구하기 위하여 $y_p=ax+b$라 놓으면, $y_p{}'=a$, $y_p{}''=0$이므로

$$y_p{}''-y_p{}'-2y_p=0-a-2(ax+b)=-2ax-(a+2b)=2x-1$$

이고 따라서 $a=-1$, $b=1$이다. 그러므로 구하고자 하는 일반해는 다음과 같다.

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-x+1$$

17.

풀이 $y''-3y'+2y=0$의 일반해 y_h를 구하기 위하여 특성근을 먼저 구한다. 특성방정식 $D^2-3D+2=0$으로부터 $D=1$, $D=2$이므로 여방정식의 해는 $y_h=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$이다. 특수해를 구하기 위하여 $y_p=ae^{3x}$이라 하면, $y_p{}'=3ae^{3x}$, $y_p{}''=9ae^{3x}$이므로

$$y''-3y'+2y=9ae^{3x}-3\left(3ae^{3x}\right)+2ae^{3x}=2ae^{3x}=5e^{3x}$$

이다. 따라서 $a=\dfrac{5}{2}$이고, 구하고자 하는 일반해는 다음과 같다.

$$y=y_h+y_p=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{5}{2}e^{3x}$$

19.

풀이 먼저 $y''+2y'+y=0$의 일반해 y_h를 구하기 위하여 특성근을 먼저 구한다. 특성방정식 $D^2+2D+1=0$으로부터 $D=-1$(중근)이므로 여방정식의 해는 $y_h=e^{-x}(C_1+C_2x)$이다. 특수해를 구하기 위하여 $y_p=(ax+b)e^{3x}$이라 하면 $y_p{}'=(a+3b+3ax)e^{3x}$, $y_p{}''=3e^{3x}(2a+3b+3ax)$이므로 $y''+2y'+y=8e^{3x}(a+2b+2ax)=xe^{3x}$;

$$16a=1,\ a+2b=0\ ;\ a=\frac{1}{16},\ b=-\frac{1}{32}\ ;\ y_p=\frac{1}{32}(2x-1)e^{3x}$$

그러므로 구하고자 하는 일반해는 다음과 같다.

$$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{3}\,x+C_2\sin\sqrt{3}\,x)+\frac{1}{32}(2x-1)e^{3x}$$

21.

풀이 $y''+2y'+y=0$의 일반해 y_h를 구하기 위하여 특성근을 먼저 구한다. 특성방정식 $D^2+2D+1=0$으로부터 $D=-1$(중근)이므로 여방정식의 해는 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$이다. 이제 일반해를 구하기 위하여 $y_p=ae^x+bx^2e^{-x}$이라 하면 $y_p'=ae^x-b(x^2-2x)e^{-x}$, $y_p''=ae^x-b(x^2-4x+2)e^{-x}$이고, $y_p''+2y_p'+y_p=4ae^x+2be^{-x}=e^{-x}+e^x$이므로 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$이다. 그러므로 구하고자 하는 일반해는 다음과 같다.

$$y=y_h+y_p=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

23.

풀이 먼저 $y''-y'+y=0$의 일반해 y_h를 구하기 위하여 특성근을 먼저 구한다. 특성방정식 $D^2-D+1=0$으로부터 $D=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$이므로 여방정식의 해는 다음과 같다.

$$y_h=e^{x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

특수해를 구하기 위하여 $y_p=a\cos 3x+b\sin 3x$라 하면 $y_p'=-3a\sin 3x+3b\cos 3x$, $y_p''=-9a\cos 3x-9b\sin 3x$이므로

$$y_p''-y_p'+y_p'=-(8a+3b)\cos 3x+(3a-8b)\sin 3x=2\sin 3x$$
$$a=\frac{6}{73},\ b=-\frac{16}{73};\ \ y_p=\frac{6}{73}\cos 3x-\frac{16}{73}\sin 3x$$

그러므로 구하고자 하는 일반해는 다음과 같다.

$$y=e^{x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{6}{73}\cos 3x-\frac{16}{73}\sin 3x$$

25.

풀이 먼저 $y''-4y'+3y=0$의 일반해 y_h를 구하기 위하여 특성근을 먼저 구한다. 특성방정식 $D^2-4D+3=0$으로부터 $D=1,3$이므로 여방정식의 해는 $y_h=C_1e^x+C_2e^{3x}$이다. 이제 $y_p=(a+bx)\cos x+(c+dx)\sin x$라 하면, $y_p'=(b+c+dx)\cos x-(a-d+bx)\sin x$, $y_p''=-(2b+c+dx)\sin x-(a-2d+bx)\cos x$이므로

$$\begin{aligned} y_p''-4y_p'+3y_p &= 2[(b-2d)x+a-2b-2c+d)]\cos x+2[(2b+d)x+2a-b+c-2d]\sin x \\ &= x\cos x \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a=-\dfrac{1}{25}$, $b=\dfrac{1}{10}$, $c=-\dfrac{11}{50}$, $d=-\dfrac{1}{5}$이고, 구하고자 하는 일반해는 다음과 같다.

$$y_h=C_1e^x+C_2e^{3x}+\frac{1}{50}[(5x-2)\cos x-(10x+11)\sin x]$$

27.

풀이 먼저 $y''+2y'+2y=0$의 일반해 y_h를 구하기 위하여 특성근을 먼저 구한다. 특성방정식 $D^2+2D+2=0$으로부터 $D=-1\pm i$이므로 여방정식의 해는 $y_h=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$이다. 특수해를 구하기 위하여 $y_p=e^x(a\cos x+b\sin x)$이라 하면

$$y_p'=e^x[(a+b)\cos x+(-a+b)\sin x],\ y_p''=2e^x(b\cos x-a\sin x)$$

이므로

$$y''+2y'+2y=4e^x[(a+b)\cos x+(-a+b)\sin x]=2e^x\cos x$$

이고 $a=b=-\dfrac{1}{4}$이므로 구하고자 하는 일반해는 다음과 같다.

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{4}e^x(\cos x+\sin x)$$

29.

풀이 (a) e^x 을 테일러 급수전개식으로 나타내면 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 이므로 x 를 iqx 로 대치하면 된다.

(b) $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ 이므로

$$e^{iqx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iqx)^{4n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iqx)^{4n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iqx)^{4n+2}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iqx)^{4n+3}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(qx)^{4n}}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(qx)^{4n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(qx)^{4n+2}}{n!} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(qx)^{4n+3}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (qx)^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

(c) $\cos qx$ 와 $\sin qx$ 의 테일러 급수전개식을 구하면 각각

$$\cos qx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (qx)^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin qx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (qx)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

이고, $e^{(p+iq)x} = e^{px} \cdot e^{iqx}$ 이므로 명백히 $e^{(p+iq)x} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx)$ 가 성립한다.

Section 10.3 연습문제

1.

풀이 (a) $\frac{dP}{dt}=k(M-P)$; $\frac{1}{M-P}dP=kdt$; $\int\frac{1}{M-P}dP=\int kdt$;

$\ln|P-M|=-kx+C_1$; $P-M=e^{-kx+C_1}=Ce^{-kx}$; $P(t)=M+Ce^{-kx}$;

$P(0)=M+Ce^0=0$; $P(t)=M+Ce^{-kx}$; $C=-M$

따라서 $P(t)=M(1-e^{-kx})$이다.

(b) $\lim_{t\to\infty}P(t)=\lim_{t\to\infty}M(1-e^{-kx})=M$

3.

풀이 (a) $x(t)$를 t시간 후에 탱크 안에 남아있는 소금의 양이라 하면, $\frac{dx}{dt}$는 t시간 후에 탱크 안에 유입된 소금물의 소금의 양에서 유출된 소금물의 소금의 양을 뺀 것과 같다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\text{유입량}\ -\ \text{유출량}\\&=\frac{1}{4}(\mathrm{lb/gal})\cdot 5(\mathrm{gal/min})-\frac{x(t)}{400}(\mathrm{lb/gal})\cdot 4(\mathrm{gal/min})\\&=\frac{5}{4}-\frac{1}{100}x(t)\end{aligned}$$

즉, 선형미분방정식 $\frac{dx}{dt}+\frac{1}{100}x=\frac{5}{4}$를 얻는다. $f(t)=\frac{1}{100}$, $r(t)=\frac{5}{4}$라 하면,

$\int f(t)dt=\int\frac{1}{100}dt=\frac{1}{100}t$이므로 이 미분방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}y&=\exp^{-t/100}\left(\int\frac{5}{4}e^{t/100}\,dt+C\right)=\exp^{-t/100}\left(\frac{500}{4}e^{t/100}+C\right)\\&=125+C\exp^{-t/100}\end{aligned}$$

한편 최초에 탱크 안에 들어 있는 소금의 양이 200lb 이므로

$$y(0) = 125 + C = 200;\ \ C = 75$$

이다. 따라서 $y = 125 + 75\exp^{-t/100}$이다.

(b) $\lim_{t \to \infty} y = \lim_{t \to \infty} \left(125 + 75\exp^{-t/100}\right) = 125$이므로 시간이 지남에 따라 탱크 안에 남아 있는 소금의 양은 서서히 감소하여 125lb가 된다.

5.

풀이 최초 시점인 40년 전의 인구를 P_0라 하면,

$$\frac{dP}{dt} = kP \ \text{ 또는 } \ \frac{dP}{P} = k\,dt$$

이므로 t년 후의 인구는 $P(t) = Ce^{kt}$이고, 초기조건 $P(0) = P_0$이므로 이 국가의 인구증가는 $P(t) = P_0\, e^{kt}$이다. 한편 이 국가의 인구가 40년 동안에 인구가 1.5배로 늘었으므로 $P_0\, e^{40k} = 1.5P_0$이 성립한다. 따라서 인구증가 비례상수는 $k = (\ln 1.5)/40$이고 t년 후의 인구가 2배로 된다면, $P_0\, e^{(t\ln 1.5)/40} = 1.5^{t/40} P_0 = 2P_0$이다. 즉,

$$1.5^{t/40} = 2 \text{ 또는 } t = \frac{40\ln 2}{\ln 1.5} \fallingdotseq 68.38$$

이다. 따라서 앞으로 약 28년 후에 40년 전의 인구보다 2배로 늘어나게 된다.

7.

풀이

(a) $\frac{dP}{dt}=P(a-b\ln P)$; $\frac{dP}{P(a-b\ln P)}=dt$; $\int\frac{dP}{P(a-b\ln P)}=\int dt$;

$$-\frac{\ln|a-b\ln P|}{b}=t+C_1;\ \ln|a-b\ln P|=-bt-bC_1;\ a-b\ln P=e^{-bt-bC_1};$$

$$\ln P=\frac{a-e^{-bt-bC_1}}{b};\ \ln P=\frac{a-Ce^{-bt}}{b};\ P(t)=e^{(a-Ce^{-bt})/b}$$

(b) $P(0)=P_0$이므로 $P_0=e^{(a-C)/b}$; $C=a-b\ln P_0$이다. 따라서 일반해는 다음과 같다.

$$P(t)=e^{(a-(a-b\ln P_0)e^{-bt})/b}$$

(c) $\lim_{t\to\infty}P(t)=\lim_{t\to\infty}e^{(a-(a-b\ln P_0)e^{-bt})/b}=e^{a/b}$

9.

풀이 (a) $R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$이므로 $100\frac{dq}{dt}+\frac{1}{0.05}q=120\sin 60t$를 풀어도 되지만, 그 결과가 [예제 10-14(a)]이므로

$$q(t)=\frac{1}{100}e^{-t/5}\int 120e^{t/5}\sin 60t\,dt+Ce^{-t/5}$$

$$=-\frac{6}{90001}(300\cos 60t-\sin 60t)+Ce^{-t/5}$$

이다. 한편 $q(0)=0$이므로 $q(0)=-\frac{6\cdot 300}{90001}+C=0$; $C=\frac{1800}{90001}$이고, 전하는 다음과 같다.

$$q(t)=-\frac{6}{90001}(300\cos 60t-\sin 60t)+\frac{1800}{90001}e^{-t/5}$$

(b) $i(t)=\frac{dq}{dt}$이므로

$$i(t)=\frac{360}{90001}(\cos 60t+300\sin 60t)-\frac{360}{90001}e^{-t/5}$$

11.

풀이 (a) $100\dfrac{d^2q}{dt^2}+200\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{q}{0.005}=100\cos 2t$이므로 $q''+2q'+2q=\cos 2t$이다. 따라서 여방정식은 $q''+2q'+2q=0$이고 특성근은 $D=-1\pm i$이고 여함수는

$$q_h=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$$

이다. 이제 특수해를 $q_p=a\cos 2t+b\sin 2t$라 하면,

$$q_p{}'=2(-a\sin 2t+b\cos 2t),\ \ q_p{}''=-4(a\cos 2t+b\sin 2t)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} q''+2q'+2q &= -2(a-2b)\cos 2t-2(2a+b)\sin 2t \\ &= \cos 2t \end{aligned}$$

이므로 $a=-\dfrac{1}{10},\ b=\dfrac{1}{5}$이고 $q_p=-\dfrac{1}{10}\cos 2t+\dfrac{1}{5}\sin 2t$이다. 따라서

$$q(t)=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)-\frac{1}{10}\cos 2t+\frac{1}{5}\sin 2t$$

이고

$$i(t)=\frac{d}{dt}q(t)=e^{-t}[(-C_1+C_2)\cos t-(C_1+C_2)\sin t]+\frac{1}{5}\sin 2t+\frac{2}{5}\cos 2t$$

이다. 한편 $q(0)=0,\ i(0)=0$이므로

$$q(0)=C_1-\frac{1}{10}=0,\ i(0)=-C_1+C_2+\frac{2}{5}=0;\ C_1=\frac{1}{10},\ C_2=-\frac{3}{10}$$

이다. 따라서 구하고자 하는 전하와 전류는 다음과 같다.

$$q(t)=\frac{1}{10}e^{-t}(\cos t-3\sin t)-\frac{1}{10}\cos 2t+\frac{1}{5}\sin 2t$$
$$i(t)=\frac{1}{10}e^{-t}[-4\cos t+2\sin t]+\frac{1}{5}\sin 2t+\frac{2}{5}\cos 2t$$

(b) $100\dfrac{d^2q}{dt^2}+200\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{q}{0.002}=100\sin 10t+100\cos 10t$이므로

$$q''+2q'+5q=\sin 10t+\cos 10t$$

이다. 따라서 여방정식의 특성근은 $D=-1\pm 2i$이고 여함수는

$$q_h=e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)$$

이다. 이제 특수해를 $q_p=a\cos 10t+b\sin 10t$라 하면,

$$q_p{}'=10(-a\sin 10t+b\cos 10t),\ q_p{}'=100(-a\cos 10t-b\sin 10t)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} q''+2q'+5q &= -5(19a-4b)\cos 10t-5(4a+19b)\sin 10t \\ &= \cos 10t+\sin 10t \end{aligned}$$

으로부터 $a=-\dfrac{23}{1885}$, $b=-\dfrac{3}{377}$, 즉 $q_p=-\dfrac{23}{1885}\cos 10t-\dfrac{3}{377}\sin 10t$

이다. 전하의 일반해는

$$q(t)=e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)-\frac{23}{1885}\cos 10t-\frac{3}{377}\sin 10t$$
$$i(t)=e^{-t}[(2C_2-C_1)\cos 2t-(2C_1+C_2)\sin 2t]+\frac{46}{377}\sin 10t-\frac{30}{377}\cos 10t$$

이다. 한편 $q(0)=0$, $i(0)=0$이므로

$$q(0)=C_1-\frac{23}{1885}=0,\ i(0)=2C_2-C_1-\frac{30}{377}=0;\ C_1=\frac{23}{1885},\ C_2=\frac{173}{3770}$$
$$q(t)=e^{-t}\left(\frac{23}{1885}\cos 2t+\frac{173}{3770}\sin 2t\right)-\frac{23}{1885}\cos 10t-\frac{3}{377}\sin 10t$$
$$i(t)=e^{-t}\left(\frac{30}{377}\cos 2t-\frac{53}{754}\sin 2t\right)+\frac{46}{377}\sin 10t-\frac{30}{377}\cos 10t$$

13.

풀이 (a) 정지한 후의 물체의 중심을 원점으로 하고, x를 시각 t에서의 물체의 변위라 하자. 이때 원점으로부터 아래 방향으로 잰 길이를 양의 값으로 한다. 그러면 물체가 정지하고 있을 때 용수철력은 중력과 평형을 이루고, 물체의 변위 x에 대응하는 용수철의 복원력은 $-kx$이다. 또한 중력이 $g=32$(ft/sec2)이므로 다음의 방정식을 얻는다.

$$\frac{16}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-48x \quad \text{또는} \quad \frac{d^2x}{dt^2}+96x=0$$

그러므로 특성방정식 $D^2+96=0$으로부터 특성근 $D=\pm 9.8i$를 얻는다. 따라서 일반해는

$$x(t)=C_1\cos 9.8t+C_2\sin 9.8t$$

이다. 한편 $x(0)=1/6$이므로 $C_1=1/6$이다. 또한 $v(0)=0$이고

$$v=\frac{dx}{dt}=9.8(-C_1\sin 9.8t+C_2\cos 9.8t)$$

이므로 $C_2=0$을 얻는다. 따라서 구하고자 하는 해는 $x(t)=\frac{1}{6}\cos 9.8t$이다. 그리고 이 운동은 진폭 1/6(ft), 주기 $2\pi/\sqrt{96}=0.64$(sec), 진동수 $\frac{\sqrt{96}}{2\pi}=1.56$(cycle/sec)인 단순진동이다.

(b) 물체의 저항이 $v/64$이므로 이 운동을 나타내는 미분방정식은 $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{32}\frac{dx}{dt}+96x=0$ 이고, 따라서 특성방정식 $D^2+\frac{1}{32}D+96=0$으로부터 특성근 $D=-0.0156\pm 9.8i$를 얻는다. 그러므로 이 방정식의 일반해는 $x(t)=e^{-0.0156t}(C_1\cos 9.8t+C_2\sin 9.8t)$이다. 한편 $x(0)=1/6$이므로 $C_1=1/6$이고 또한 $v(0)=0$이므로 $v=dx/dt$로부터 $C_2=0.000265$를 얻는다. 따라서 구하고자 하는 해는 다음과 같다.

$$x(t)=e^{-0.0156t}\left(\frac{1}{6}\cos 9.8t+0.000265\sin 9.8t\right)$$

(c) 매체의 저항이 $64v$이므로 미분방정식 $\frac{d^2x}{dt^2}+128\frac{dx}{dt}+96x=0$을 얻는다. 이 방정식에 대한 특성근이 $D=-0.75$, $D=-127.25$이므로 일반해는 $x(t)=C_1e^{-0.75t}+C_2e^{-127.25t}$이다. 한편 $x(0)=1/6$, $v(0)=0$이므로 연립방정식 $C_1+C_2=1/6$, $0.75C_1+127.25C_2=0$을 얻는다. 이 연립방정식의 해가 $C_1=0.17$, $C_2=-0.001$이므로 구하고자 하는 해는

$$x(t)=0.17e^{-0.75t}-0.001e^{-127.25t}$$

이다. 그러면 이 운동은 진동이 아니고 따라서 시간이 경과됨에 따라 평형위치에 놓인다.

(d) 원점을 (b)와 같이 취하고 t초 후 물체의 변위를 x라 하면, 용수철이 늘어난 길이는 $x-s$이다. 따라서 이 용수철계의 복원력은 $-48(x-s)=-48(x-\cos 4t)$이다. 그러므로 다음 미분방정식을 얻는다.

$$\frac{16}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-48(x-\cos 4t)-\frac{1}{64}\frac{dx}{dt} \quad \text{또는} \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{32}\frac{dx}{dt}+96x=96\cos 4t$$

따라서 여방정식의 특성근은 $D=-0.0156\pm 9.8i$이므로 여함수는

$$x_h(t)=e^{-0.0156t}(C_1\cos 9.8t+C_2\sin 9.8t)$$

이다. 한편 특수해 x_p를 구하기 위하여 $x_p=k_1\sin 4t+k_2\cos 4t$라 하면,

$$32x_p''+x_p'+3072x=(2650k_1-4k_2)\sin 4t+(4k_1+2650k_2)\cos 4t$$

이므로 $k_1=0.0019$, $k_2=1.2$이다. 즉, 특수해가 $x_p(t)=0.0019\sin 4t+1.2\cos 4t$이므로 일반해는 $x(t)=e^{-0.0156t}(C_1\cos 9.8t+C_2\sin 9.8t)+0.0019\sin 4t+1.2\cos 4t$이고, $x(0)=7/6$, $v(0)=0$이므로 $C_1=-1/30$, $C_2=-0.0008$을 얻는다. 즉, 구하고자 하는 해는 다음과 같다.

$$x(t)=e^{-0.0156t}(-0.0333\cos 9.8t-0.0008\sin 9.8t)+0.0019\sin 4t+1.2\cos 4t$$

그리고 이 운동은 감쇠진동과 단진동의 합을 나타내며, 따라서 시간이 충분히 경과하면 감쇠진동은 소멸되고 단진동만 남게 된다.

Section 10.4 연습문제

1.

풀이 $L[2t^2+t+3] = \int_0^\infty (2t^2+t+3)e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (2t^2+t+3)e^{-st}dt$

$$= (-1)\lim_{b\to\infty}\left(\frac{2t^2+t+3}{s}+\frac{4t+1}{s^2}+\frac{4}{s^3}\right)\Bigg|_0^b = \frac{3s^2+s+4}{s^3},\ \ s>0$$

3.

풀이 $L[\sin 2t] = \int_0^\infty \sin 2t\, e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin 2t\, e^{-st}dt$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{2-e^{-bs}(2\cos 2b + s\sin 2b)}{s^2+4}\Bigg|_0^b = \frac{2}{s^2+4}\ ,\quad s>0$$

5.

풀이 $L[e^{2t}\sin t] = \int_0^\infty e^{2t}\sin t\, e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin t\, e^{-(s-2)t}dt$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1-e^{-(s-2)b}[\cos b + (s-2)\sin b)}{s^2-4s+5}\Bigg|_0^b = \frac{1}{s^2-4s+5}\ ,\quad s>2$$

7.

풀이 $L[t^3 e^{2t/3}] = \int_0^\infty t^3 e^{2t/3}e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^3 e^{-(s-(2/3))t}dt$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{486-e^{-(s-(2/3))b}[486+162(3s-2)b+27(3s-2)^2b^2+3(3s-2)^3b^3]}{(3s-2)^4}\Bigg|_0^b$$

$$= \frac{1}{s^2-4s+5}\ ,\quad s>\frac{2}{3}$$

9.

풀이 $\dfrac{1}{(s-2)(s-1)(s+1)(s+2)}=\dfrac{1}{(s^2-4)(s^2-1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{s^2-4}-\dfrac{1}{s^2-1}\right)$이므로

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-1)(s+1)(s+2)}\right]&=\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4}-\frac{1}{s^2-1}\right]\\
&=\frac{1}{3}\left(L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2-2^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sinh 2t-\sinh t\right)=\frac{1}{6}(\sinh 2t-2\sinh t)
\end{aligned}
$$

11.

풀이 $\dfrac{s-1}{(s^2+1)(s^2+4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{1}{s^2+1}+\dfrac{1}{s^2+4}-\dfrac{s}{s^2+4}\right)$이므로

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{s-1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]&=L^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+4}-\frac{s}{s^2+4}\right)\right]\\
&=\frac{1}{3}\left(L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]+\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]\right)\\
&=\frac{1}{3}\left(\cos t-\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\cos 2t\right)
\end{aligned}
$$