

주파수 영역 해석의 기초

책의 ‘1절 신호의 표현과 주파수’와 관련하여 신호 표현을 위한 기본 신호로서의 정현파의 장점에 대한 보충 설명을 덧붙이고, 기본 신호의 직교성의 유용성에 대해 설명하였다.

책의 ‘2절 푸리에 급수’와 관련하여 직교성을 이용한 푸리에 계수 결정에 대해 상세하게 설명하고, 푸리에 급수의 세 가지 표현의 유도 과정을 제시하였으며, 신호 파형의 대칭성에 따른 푸리에 계수 계산의 간소화 팁을 새로이 추가하였다. 또한 진폭 및 위상 스펙트럼의 역할과 중요성, 그리고 푸리에 급수의 주요 성질에 대해 상세히 부연 설명하였다. 그 외에도 필터 설계 문제에서도 접하게 되는 깃스 현상에 대한 설명을 추가하였다.

책의 ‘3절 푸리에 변환’과 관련하여 주기 신호의 푸리에 급수 및 푸리에 변환의 관계에 대해 설명을 추가하였고, 주요한 기본 신호의 푸리에 변환쌍 및 푸리에 변환의 주요 성질에 대해 다수의 예제와 함께 상세히 설명하였다.

연속 신호의 푸리에 해석을 통하여 푸리에 해석과 신호 및 시스템의 주파수 영역 취급에 대해 개념을 제대로 확립하면 이산 시간 푸리에 해석은 어려울 것이 없으므로 심화 학습 자료를 상당한 분량으로 상세히 만들었으니 잘 익혀두기 바란다.

5.1 신호의 표현과 주파수

(1) 정현파의 장점

정현파는 기본 신호가 지녀야 할 바람직한 성질들을 모두 만족시키는 0 순위 후보 신호이다. 오직 하나의 주파수만 가지며(4번 성질), 파형이 단순하고 직교성을 지닌다(1번 성질). 또한 푸리에 급수와 변환에 의해 광범위한 종류의 신호들을 표현할 수 있다(2번 성질). 그리고, 정현파를 전기 회로에 인가하면 출력 역시 같은 주파수의 정현파로 그 크기와 위상만 달라진다는 사실에서 알 수 있듯이 3번의 성질도 잘 만족한다. 이 성질은 매우 유용한데, 예를 들어, 회로에 (책)[그림 5.1(b)]의 신호를 입력으로 인가할 경우, 그 자체로는 입력 파형의 특이한 형태로 인해 응답을 구하기가 매우 어렵지만, 그림과 같이 신호를 두 개의 정현파의 합으로 표현하게 되면 중첩의 원리를 이용하여 손쉽게 시스템 응답을 구할 수 있게 된다.

(2) 기본 신호와 직교성

정현파를 기본 신호로 채택하여 이의 일차 결합으로 주기 신호를 나타내는 것은 2차원 평면에서 벡터 \vec{i}, \vec{j} 를 기본 벡터로 선정하여 이의 일차 결합으로 벡터 \vec{v} 를 나타내는 것과 기본적으로 같은 종류의 문제이다.

벡터 \vec{v} 가 다음과 같이 벡터 \vec{i}, \vec{j} 에 의해 표현된다고 하자.

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} \quad (\text{C5-1})$$

식 (C5-1)의 계수 a, b 를 구하는 것이 이 표현의 관건이다. 이를 위해 식(C5-1)의 양변에 대해 벡터 \vec{i} 및 \vec{j} 와의 내적을 취하면

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = a\vec{i} \cdot \vec{i} + b\vec{i} \cdot \vec{j} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = a\vec{j} \cdot \vec{i} + b\vec{j} \cdot \vec{j} \end{cases} \quad (\text{C5-2})$$

식 (C5-2)은 두 미지수 a, b 에 대한 연립방정식이다. 그런데, 만약 벡터 \vec{i} 와 \vec{j} 가 직교한다면, 즉 $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ 이라면 식 (C5-2)는 다음과 같이 각각의 미지수에 대한 독립적인 방정식이 되어 복잡하게 연립방정식을 풀지 않고서도 손쉽게 값을 구할 수 있게 된다.

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = a\vec{i} \cdot \vec{i} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = a\vec{j} \cdot \vec{j} \end{cases} \quad (\text{C5-3})$$

이제 논의를 좀 더 확장해보기로 하자. 벡터 \vec{v} 가 3차원 벡터인데 식 (C5-1)과 같이 2차원 평면에 근사화하여 나타내었다가 원래대로 3차원에서 나타내려고 한다면, 기본 벡터 \vec{i}, \vec{j} 에 새로운 벡터 \vec{k} 를 추가하여 다음과 같이 벡터 \vec{v} 를 표현하게 된다.

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \quad (\text{C5-4})$$

계수 a, b, c 를 구하기 위해 앞의 경우와 마찬가지로 식 (C5-4)의 양변에 벡터 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 와 각각 내적을 취하면

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = a \vec{i} \cdot \vec{i} + b \vec{i} \cdot \vec{j} + c \vec{i} \cdot \vec{k} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = a \vec{j} \cdot \vec{i} + b \vec{j} \cdot \vec{j} + c \vec{j} \cdot \vec{k} \\ \vec{k} \cdot \vec{v} = a \vec{k} \cdot \vec{i} + b \vec{k} \cdot \vec{j} + c \vec{k} \cdot \vec{k} \end{cases} \quad (\text{C5-5})$$

식 (C5-5)을 미지수 a, b, c 에 대해 연립으로 풀어 구해진 a, b 의 값은 일반적으로 식 (C5-2)을 풀어서 구한 a, b 의 값과는 다르다. 이는 역으로 3차원에서 2차원으로 표현을 바꿀 때에도 마찬가지이다.

그러나 만약 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 가 서로 직교한다면 식 (C5-5)는 식 (C5-3)의 경우와 마찬가지로 각 미지수만의 독립적인 방정식이 된다. 즉

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{v} = a \vec{i} \cdot \vec{i} \\ \vec{j} \cdot \vec{v} = b \vec{j} \cdot \vec{j} \\ \vec{k} \cdot \vec{v} = c \vec{k} \cdot \vec{k} \end{cases} \quad (\text{C5-6})$$

식 (C5-6)과 식 (C5-3)을 비교하면 계수 a, b 의 값은 그대로임을 알 수 있다. 그러므로 벡터 표현의 차원을 늘리더라도 모든 계수를 다시 계산할 필요 없이 새로이 추가된 기본 벡터에 대한 계수만 구하면 된다. 역으로 차원을 줄일 경우에도 제거할 기본 벡터와 계수만 없애면 되고 나머지는 그대로 두면 된다.

이는 기본 벡터의 직교성이 성립할 때만 얻어지는 놀라운 결과로서 계수 계산이 매우 용이할뿐더러 유용성이 크다. 만약 직교성이 성립하지 않는다면, 식 (C5-2)이나 식 (C5-5)와 같이 차원이 작을 경우에는 계수를 구하기 위해 연립 방정식을 푸는 것이 어렵지 않을 수도 있겠지만, 차원이 커지게 되면 보통 문제가 아니다.

푸리에 해석에서도 기본 신호인 정현파가 이러한 직교성을 만족하기 때문에 계수 결정 구조가 간단하고 신호의 근사적인 합성이나 에너지 관계(파스발 정리) 등에서 양호한 특성을 갖게 된다.

5.2 푸리에 급수

5.2.1 직교성을 이용한 푸리에 계수의 결정

주기 신호를 (책)식 (5.4) 또는 (책)식 (5.11)의 푸리에 급수로 표현하려면 푸리에 계수라고 부르는 각 항의 계수 a_0, a_k, b_k 또는 X_k 을 구해야만 한다. 그런데, 기본 신호로 채택한 정현파 신호는 직교성이라는 훌륭한 성질을 지니고 있어서 푸리에 계수를 쉽게 구할 수 있다.

벡터와 관련하여 두 벡터 \vec{u}, \vec{v} 가 직교하면 두 벡터의 내적 $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ 이라는 사실은 잘 알고 있을 것이다. 마찬가지로 함수도 두 함수 f, g 의 내적이 0이면 직교한다고 하며, 함수의 내적은 다음과 같이 정의한다.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g^*(t) dt \quad (\text{C5-7})$$

여기서 구간 $[a, b]$ 는 두 함수의 정의 구간이고 $*$ 는 복소 공액쌍을 나타낸다.

함수의 내적을 이용하여 푸리에 급수 표현의 기본 신호들인 DC, 기본파 및 고조파 사이의 직교성을 확인해보자. 먼저 DC와 임의의 정현파 성분 간에는 내적이 0으로 직교성이 만족된다.

$$\int_T 1 \cdot \cos k\omega_0 t \, dt = 0 \quad (\text{C5-8.a})$$

$$\int_T 1 \cdot \sin k\omega_0 t \, dt = 0 \quad (\text{C5-8.b})$$

또한 임의의 두 정현파 성분 간에도 역시 내적이 0으로 직교성이 만족된다.

$$\int_T \cos k\omega_0 t \sin m\omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} \int_T [\sin(m+k)\omega_0 t + \sin(m-k)\omega_0 t] \, dt = 0 \quad (\text{C5-9.a})$$

$$\int_T \cos k\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} \int_T [\cos(m+k)\omega_0 t + \cos(m-k)\omega_0 t] \, dt = 0, \quad k \neq m \quad (\text{C5-9.b})$$

$$\int_T \sin k\omega_0 t \sin m\omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} \int_T [\cos(m-k)\omega_0 t - \cos(m+k)\omega_0 t] \, dt = 0, \quad k \neq m \quad (\text{C5-9.c})$$

식 (C5-8)과 식 (C5-9)는 정현파를 주기 적분하면 그 값이 0이라는 사실로부터 얻어진 결과이다(k 고조파는 T 동안 k 번 주기 적분한 셈이 된다).

푸리에 급수의 기본 신호인 정현파들은 벡터의 경우와 마찬가지로 자신과의 내적을 취할 경우에만 내적이 0이 되지 않고 값을 갖는다.

$$\int_T 1^2 dt = T \quad (\text{C5-10.a})$$

$$\int_T \cos^2 k\omega_0 t \, dt = \int_T \frac{1 + \cos 2k\omega_0 t}{2} dt = \frac{T}{2} \quad (\text{C5-10.b})$$

$$\int_T \sin^2 k\omega_0 t \, dt = \int_T \frac{1 - \cos 2k\omega_0 t}{2} dt = \frac{T}{2} \quad (\text{C5-10.c})$$

(책)식 (5.11) 표현의 복소 정현파의 경우도 다음과 같이 직교성이 성립한다.

$$\int_T e^{jm\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_T e^{j(m-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ T, & m = k \end{cases} \quad (\text{C5-11})$$

이제 (복소) 정현파의 직교성을 이용하여 푸리에 계수를 구해보기로 하자. (책)식 (5.4)의 DC항의 계수 a_0 는 양변에 기본 신호 1과의 내적을 취하면

$$\int_T x(t) dt = \int_T a_0 dt + \int_T \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t \right) dt = \int_T a_0 dt = a_0 T \quad (\text{C5-12})$$

따라서 a_0 는 다음과 같이 구해지는데,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (\text{C5-13})$$

이것은 한 주기에 대한 평균값이므로 DC 성분이라는 것을 알 수 있다.

코사인 k 고조파의 계수 a_k 도 마찬가지로 내적을 취하기 위해 식 (5.4)의 양변에 기본 신호 $\cos k\omega_0 t$ 를 곱해서 1 주기 적분을 하면

$$\begin{aligned} & \int_T x(t) \cos k\omega_0 t \, dt \\ &= \int_T a_0 \cos k\omega_0 t \, dt + \int_T \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\omega_0 t \cos k\omega_0 t \right) dt \\ & \quad + \int_T \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\omega_0 t \cos k\omega_0 t \right) dt \end{aligned} \quad (\text{C5-14})$$

우변의 첫 번째 항은 식 (C5-8.a)에 의해, 그리고 마지막 항은 식 (C5-9.a)에 의해 0이 되어 없어진다. 또한 우변의 두 번째 항은 식 (C5-9.b)와 식 (C5-10.b)에 의해 $m = k$ 인 항만 남게 되므로 다음과 같이 간단히 정리된다.

$$\int_T x(t) \cos k\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} a_k \quad (\text{C5-15})$$

따라서 a_k 은 다음과 같다.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos k \omega_0 t \, dt \quad (\text{C5-16})$$

같은 방법으로 사인 k 고조파의 계수 b_k 를 구하면 다음과 같이 된다.

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin k \omega_0 t \, dt \quad (\text{C5-17})$$

5.2.2 푸리에 급수의 세 가지 표현

(책)식 (5-11)의 표현은 다음과 같이 (책)식 (5-9)의 코사인파를 복소 정현파로 바꾸어 정리하여도 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{e^{j\phi_k} e^{jk\omega_0 t} + e^{-j\phi_k} e^{-jk\omega_0 t}}{2} \right) \quad (\text{C5-18}) \\ &= \dots + \frac{c_k}{2} e^{-j\phi_k} e^{-jk\omega_0 t} + \dots + c_0 e^{j0\omega_0 t} + \dots + \frac{c_k}{2} e^{j\phi_k} e^{jk\omega_0 t} + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

여기서

$$X_k = |X_k| e^{j\angle X_k} = \begin{cases} \frac{c_k}{2} e^{j\phi_k}, & k > 0 \\ c_0, & k = 0 \\ \frac{c_k}{2} e^{-j\phi_k}, & k < 0 \end{cases} \quad (\text{C5-19})$$

그런데, (책)식 (5-11) 또는 식 (C5-18) 표현의 푸리에 계수 X_k 는 (책)식 (5-10)의 c_k , ϕ_k 와는 달리 복소 정현파의 직교성을 이용하여 직접 계산할 수 있다. 식 (C 5-18)의 양변에 $e^{-jk\omega_0 t}$ 를 곱하여 1 주기 적분, 즉 내적을 취하면 식 (C5-11)의 직교성에 의해 다음과 같이 되어

$$\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{Tm=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{jm\omega_0 t} e^{-jk\omega_0 t} dt = X_k T \quad (\text{C5-20})$$

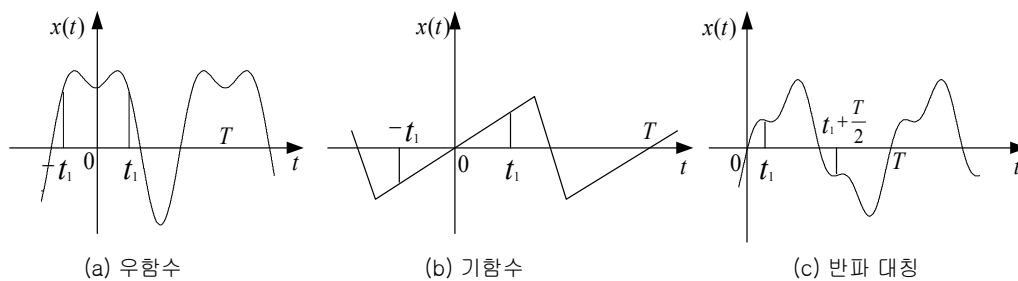
계수 X_k 의 계산식은 다음과 같이 간단히 구해진다.

$$X_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (\text{C5-21})$$

푸리에 급수의 세 가지 표현 모두 나름대로의 장단점을 가지고 있으나, 신호와 시스템의 이론적 해석에서는 식 (C5-18)의 (복소) 지수 함수 형식을 선호한다. 왜냐하면 이 형식이 나머지 두 삼각 함수 형식에 비하여 표현식과 계수를 구하는 식이 매우 간결하고 적분을 비롯한 수학적 조작과 취급이 훨씬 쉽기 때문이다. 반면에, 물리적 의미를 부여하거나 시각화하기에는 쉽지 않으므로, 물리적 상황을 직관적으로 또는 정성적으로 이해하기 위해서는 삼각 함수 형식 표현을, 이론적이고 수학적 이해와 분석을 위해서는 지수 함수 형식 표현을 이용하는 것이 낫다. 그러므로 이들 형식간의 상호 관계 및 상호 변환에 대해 익숙해지도록 노력을 기울여야 할 것이다.

5.2.3 대칭성을 이용한 푸리에 계수 계산의 간소화

주기 신호의 파형의 대칭성을 이용하면 Fourier 계수의 계산 과정을 간소화 할 수 있다. 파형의 대칭성에는 [그림 C5-1]에 나타난 것처럼 기함수 대칭, 우함수 대칭, 반파 대칭의 세 가지가 있다.



[그림 C5-1] 신호의 대칭성

우함수 대칭은 신호 파형을 세로축에 대해 접으면 일치하는 경우로

$$x(t) = x(-t) \quad (\text{C5-22})$$

기함수 대칭은 신호 파형을 원점에 대해 180° 회전시 일치하는 경우로

$$x(t) = -x(-t) \quad (\text{C5-23})$$

반파 대칭은 신호 파형을 반주기 이동시켜 가로축에 대해 접으면 일치한다.

$$x(t) = -x\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (\text{C5-24})$$

기함수 대칭 신호와 우함수 대칭 신호 간에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{cases} \int_{-t}^t (\text{우함수}) dt = 2 \int_0^t (\text{우함수}) dt \\ \int_{-t}^t (\text{기함수}) dt = 0 \end{cases} \quad (\text{C5-25})$$

$$\begin{cases} (\text{우함수}) \times (\text{우함수}) = (\text{우함수}) \\ (\text{우함수}) \times (\text{기함수}) = (\text{기함수}) \\ (\text{기함수}) \times (\text{기함수}) = (\text{우함수}) \end{cases} \quad (\text{C5-26})$$

식 (C5-25)는 계수를 결정하기 위한 주기 적분에서 피적분 함수가 기함수이면 적분 값이 0이 되므로 적분을 수행할 필요가 없으며, 피적분 함수가 우함수이면 반주기 적분하여 그 결과의 2배를 취하면 된다는 사실을 알려준다. 식(C5-26)은 피적분 함수가 우함수인지, 기함수인지를 판별할 때 쓰인다.

주기 신호 $x(t)$ 가 우함수인 경우, 식 (C5-25)로부터

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (\text{C5-27})$$

또한, \cos 항의 계수 a_n 계산을 위한 주기 적분의 피적분 함수는 우함수이므로

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (\text{C5-28})$$

그러나, \sin 항의 계수 b_n 계산을 위한 주기 적분의 피적분 함수는 기함수이므로 다음과 같이 0이 된다.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt = 0 \quad (\text{C5-29})$$

즉, **우함수 대칭의 경우 \sin 항이 없어진다.** (책)식 (5-12)에 의해 **지수 함수 형식의 표현에서는 X_k 가 실수가 된다.**

주기 신호 $x(t)$ 가 기함수인 경우, DC성분의 계수 a_0 와 \cos 항의 계수 a_n 은 기함수의 주기 적분이 되므로 다음과 같이 0이 된다.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0 \quad (\text{C5-30})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad (C5-31)$$

sin항의 계수 b_n 을 계산하기 위한 주기 적분의 피적분 함수는 우함수이므로

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (C5-32)$$

즉, **기함수 대칭의 경우 DC항과 cos항이 없어지고 sin항만 존재한다.** (책)식 (5-12)에 의해 **지수 함수 형식의 표현에서는 X_k 가 순허수가 된다.**

$x(t)$ 가 반파 대칭의 경우, $x(t) = -x(t \pm T/2)$ 임을 이용하여 간소화할 수 있다. DC항의 계수 a_0 에 대해서는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^0 -x(t + \frac{T}{2}) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ &= - \int_0^{\frac{T}{2}} x(t') dt' + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (C5-33)$$

cos항의 계수 a_n 의 경우도 같은 방법을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 x(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} x(t + \frac{T}{2}) \cos n\omega_0 (t + \frac{T}{2}) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[-\cos n\pi \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \begin{cases} 0, & n = \text{even} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt, & n = \text{odd} \end{cases} \end{aligned} \quad (C5-34)$$

sin항의 계수 b_n 에 대해서도 a_n 과 같은 방법으로 다음의 결과를 얻는다.

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = \text{even} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt, & n = \text{odd} \end{cases} \quad (\text{C5-35})$$

따라서, **반파 대칭의 경우 DC항 sin항과 cos항의 짝수항들이 사라지고 홀수 항들만 남는다. 지수함수 형식 표현의 계수 X_k 도 홀수항만 존재한다.**

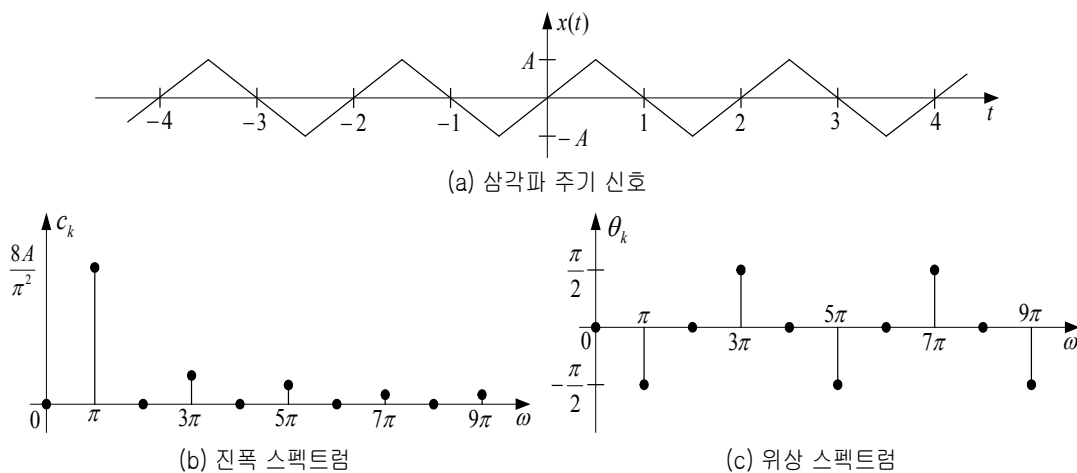
이상의 결과를 [표 C5-1]에 요약하여 나타내었다. 주어진 주기 신호 $x(t)$ 가 어떠한 대칭성도 만족 않을 경우에는 심화 학습 자료 2장에서 설명한 것처럼 $x(t)$ 를 기함수 대칭 성분과 우함수 대칭 성분의 합으로 표현하여, 즉 $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ 로 해서 대칭성을 적용할 수 있다.

[표 C5-1] 대칭성에 의한 푸리에 계수 계산의 간소화

대칭 종류	대칭 조건	푸리에 계수
우함수	$x(t) = x(-t)$	a_0 , cos항만 있음 (X_k 는 실수)
기함수	$x(t) = -x(-t)$	sin항만 있음 (X_k 는 순허수)
반파대칭	$x(t) = -x(t \pm \frac{T}{2})$	기수 고조파만 있음 (홀수인 X_k 만 있음)

■ 예제 C5-1 : 주기 신호에 대한 푸리에 급수의 세 가지 표현

[그림 C5-2(a)]에 나타낸 삼각파 주기 신호에 대해 3가지 푸리에 급수 표현을 구하라.



[그림 C5-2] 삼각파 주기 신호의 파형과 푸리에 스펙트럼

<풀이>

① 삼각 함수 형식 푸리에 급수 표현

그림에서 보면 신호의 주기는 $T=2$ 이고, 기함수 대칭이면서 반파 대칭이므로 홀수의 \sin 항만 남음을 미리 알 수 있다. 또한 파형의 형태상 $1/4$ 주기만 적분해서 그 결과를 4배하면 되므로 $1/4$ 주기에서의 신호의 함수를 구해보면 다음과 같다.

$$x(t) = \frac{4A}{T}t, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{4}$$

이제 \sin 항의 계수 b_n 을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{32A}{T^2} \int_0^{\frac{T}{4}} t \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{32A}{T^2} \left[\frac{1}{n^2\omega_0^2} \sin n\omega_0 t - \frac{1}{n\omega_0} t \cos n\omega_0 t \right] \Bigg|_0^{\frac{T}{4}} \\ &= \begin{cases} \frac{8A}{n^2\pi^2}, & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{8A}{n^2\pi^2}, & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

따라서 $x(t)$ 의 푸리에 급수 표현은 다음과 같이 주어진다.

$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left[\sin\omega_0 t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega_0 t - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\omega_0 t + \dots \right]$$

② 간결형 삼각 함수 형식 푸리에 급수 표현

①의 결과에서 보면 \sin 항만 있으므로 삼각 함수의 합성 공식을 적용할 필요 없이 $\sin\theta = \cos(\theta - 90^\circ)$, $-\sin\theta = \cos(\theta + 90^\circ)$ 임을 이용하여 ①의 결과를 변형하면 다음과 같이 $x(t)$ 에 대한 간결형 삼각함수 형식의 푸리에 급수 표현이 주어진다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{8A}{\pi^2} \left[\sin\omega_0 t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega_0 t - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\omega_0 t + \dots \right] \\ &= \frac{8A}{\pi^2} \left[\cos(\omega_0 t - 90^\circ) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_0 t + 90^\circ) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_0 t - 90^\circ) + \dots \right] \end{aligned}$$

이 결과로부터 $x(t)$ 의 푸리에 스펙트럼을 그릴 수 있다. [그림 C5-2]에서 보면 짝수 고조파는 전혀 없고 홀수 고조파 성분만 나타나며 위상은 $\pi/2$ 와 $-\pi/2$ 가 번갈아 가면서 나타난다.

③ 지수 함수 형식 푸리에 급수 표현

이미 구해진 결과를 이용하여 푸리에 계수들의 관계로부터 지수 함수 형식 푸리에 급수 표현을 얻을 수 있지만 다음과 같이 직접 식 (C5-21)을 이용하여 계수를 결정해 보면,

$$\begin{aligned}
 X_k &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \frac{4A}{T} t e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[\frac{4A}{T} t \left(-\frac{1}{jk\omega_0} \right) e^{-jk\omega_0 t} + \frac{4A}{T} \left(-\frac{1}{jk\omega_0} \right)^2 e^{-jk\omega_0 t} \right] \bigg|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \\
 &= \begin{cases} -\frac{2}{T} \frac{8A}{T} \frac{T^2}{4k^2\pi^2} e^{-jk\frac{\pi}{2}}, & k = \text{odd} \\ 0, & k = \text{even} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -j \frac{4A}{k^2\pi^2}, & k = 1, 5, 9, \dots \\ j \frac{4A}{k^2\pi^2}, & k = 3, 7, 11, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

이 경우에도 삼각 함수 형식 표현과 동일하게 푸리에 계수의 짝수항은 없어지고 홀수항만 존재한다. 따라서 $x(t)$ 에 대한 지수 함수 형식 푸리에 급수 표현은 다음과 같이 된다.

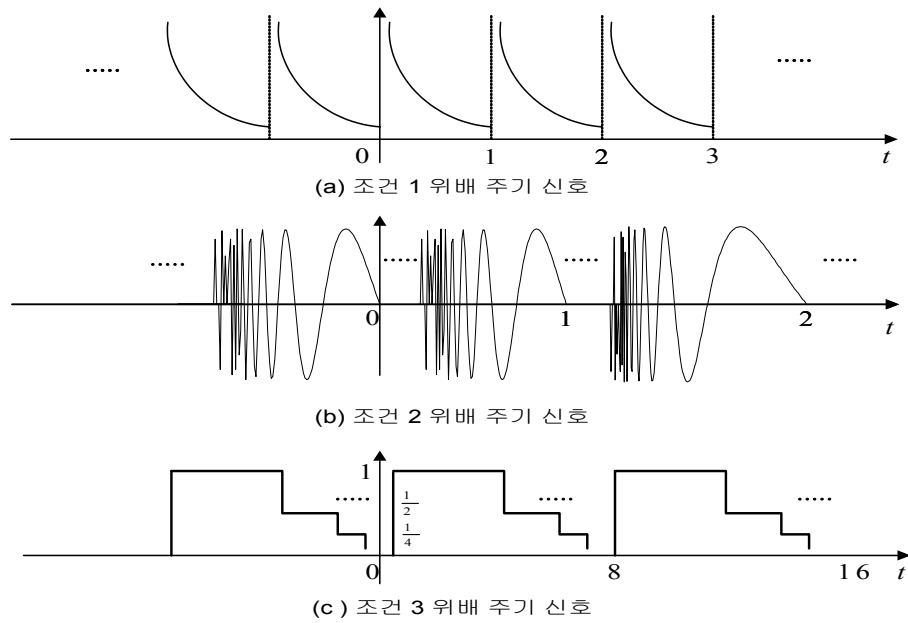
$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \\
 &= \dots + \frac{4A}{\pi^2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\omega_0 t} + 0 + \frac{4A}{\pi^2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega_0 t} + \frac{4A}{3^2\pi^2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j3\omega_0 t} + \dots
 \end{aligned}$$

■

5.2.4 푸리에 급수의 수렴 조건

우리는 모든 시간에서 값이 유한한 주기 신호들을 다룬다. 그런데, 푸리에 급수 표현은 신호의 표현을 바꾼 것이지 신호의 특성을 바꾼 것이 아니므로 급수 표현의 등식이 항상 성립하기 위해서는 유한한 값을 갖도록 푸리에 급수가 수렴해야 한다. 이러한 푸리에 급수의 수렴에 관한 조건을 정리한 것이 책에서 설명한 디리클레 조건이다. 그중에서도 (책)식 (5.15)의 조건은 푸리에 변환과 라플라스 변환으로 주파수 영역 변환의 개념이 확장될 때 밀접한 관련이 있으므로 잘 유념해두기 바란다.

디리클레 조건을 만족하지 못하는 특수한 주기 신호들의 예를 그림 [C5-3]에 보였다. 대부분의 물리적인 주기 신호는 디리클레 조건을 만족하여 푸리에 급수가 수렴한다.



[그림 C5-3] 디리클레 조건에 위배되는 주기 신호

5.2.5 진폭 스펙트럼과 위상 스펙트럼

음의 주파수란 실제로는 존재하지 않으므로, 스펙트럼은 (책)식 (5.8)의 코사인파의 진폭 c_k 와 위상 ϕ_k 를 나타내는 것이 타당할 것이다. 그러나 푸리에 변환과의 일관성이나 수학적 취급의 용이함 등으로 인해 많은 경우에 복소 정현파를 이용한 (책)식 (5.11)의 푸리에 계수 X_k 의 크기 $|X_k|$ 와 위상 $\angle X_k$ 을 주파수 $\omega(f)$ 에 대해 그린다. 이 경우 음의 주파수 축에 대해서도 스펙트럼이 그려지며, 진폭 스펙트럼의 크기가 반으로 줄어든다($c_k = 2|X_k|$).

(책)[그림 5.8]의 신호와 같이 파형의 변화가 빠르지 않고 비교적 매끄러운 주기 신호는 주파수 성분이 몇 개밖에 되지 않으나, 파형의 변화가 빠르고 급격한 경우에는 이를 실현하기 위해 훨씬 많은 그리고 높은 주파수 성분을 필요로 한다. 극단적인 예로 정현파의 경우에는 기본 주파수 ω_0 에서만 진폭 스펙트럼의 값이 나타나는 반면, 불연속점과 같이 급격한 변화를 포함하는 사각 펄스 신호는 주파수 성분을 무한히 필요로 한다.

신호의 평활한 정도 $smoothness$ 는 신호의 도함수들이 몇 차까지 존재하느냐에 의해 판별할 수 있는데, 신호의 $(m-1)$ 차까지의 도함수가 연속이고 m 차 도함수가 불연속이면 진폭 스펙트럼 $c_k(|X_k|)$ 는 적어도 $\frac{1}{k^{m+1}}$ 의 비율로 감쇠한다. 이 결과는 푸리에 급수의 점근적인 수렴 속도를 예측하는 데 유용하다. 정현파는 끊임없이 미분 가능한, 즉 무한 차수의 도함수를 가지므로 $m = \infty$ 인 가장 완만한 신호로서, 진폭 스펙트럼이 $\frac{1}{\infty}$ 의 비율로 감쇠하여 고조파 성분을 전혀 가지지 않는다. 하지만 사각 펄스 신호는 신호 자체가 불연속이므로 도함수가 존재하지 않는다. 즉 $m = 0$ 이므로 진폭 스펙트럼이 $1/k$ 의 비율로 느리게 감쇠하게 된다.

5.2.6 깁스 현상

(책)[그림 5-10]에 나타난 사각 펄스의 근사 합성신호는($N=19$ 의 경우) 불연속점 근처에서 (불연속 크기의) 약 9%의 오버슈트와 발진 동작을 보인다. 푸리에 급수 표현의 등식에 근거해 $N \rightarrow \infty$ 가 되면 오버슈트와 발진이 당연히 없어질 것이라 기대할 수 있으나 불행히도 그렇지 못하다.

발진은 진동 주파수 N 을 가지며, $N \rightarrow \infty$ 이면 발진의 진동 주파수도 따라서 증가하고, 오버슈트는 N 값에 상관없이 약 9%를 유지한다. 이런 희한한 현상은 수학적 결과와 모순되어 보인다. 이 문제는 Albert Michelson이 조파 분석기를 개발하는 과정에서 제기했고, Josiah Willard Gibbs가 이 점에 대한 수학적 설명을 하였다. 그래서 이것이 깁스 현상이라 불리게 되었다.

(책)[그림 5-10]의 사각 펄스는 디리클레 조건을 만족하므로 푸리에 급수가 수렴하여 모든 시간에서 값이 존재하며, 이때 불연속점에서는 불연속 값의 평균으로 값이 정해진다. 그림을 보면, 어떤 N 값에 대해서도 합성 신호는 불연속점에서 정확히 그 값을 가지고 있다. 이를 제외한 t 의 임의의 값, 즉, $t = t_1$ 에 대해서는 $N \rightarrow \infty$ 일 때 합성 신호 값이 원래 신호와 정확히 일치한다.

따라서 사각 펄스의 푸리에 급수 표현에서 오차 제곱의 평균은 0이 된다. 그러나 t_1 이 불연속점 가까이에 선정될수록 특정 값 이하로 오차를 감소시키기 위해 N 이 커져야만 한다. 그러므로 N 이 증가함에 따라 합성 신호의 맥동은 불연속점을 향하여 집중되게 된다. 그러나 발진의 진동 주파수가 N 이고 오버슈트의 빠른 부분의 폭이 $\frac{1}{2N}$ 이므로 어떤 유한한 N 값에 대한 맥동의 최대값은 언제나 일정하다. 이것이 깁스 현상이다.

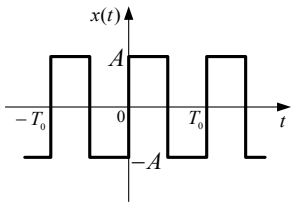
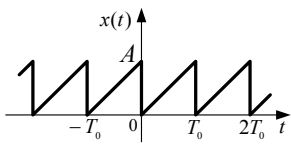
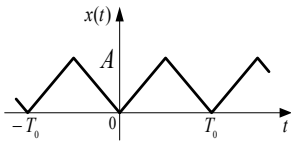
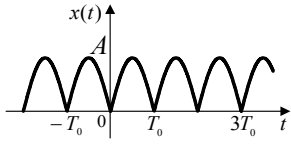
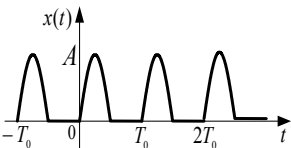
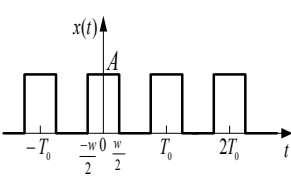
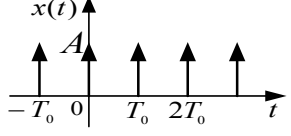
이 현상이 내포하고 있는 의미는, 푸리에 급수 표현에 의거해 불연속 신호를 근사화(조파 합성)할 때 통상적으로 불연속점 가까이에 고주파 맥동과 오버슈트가 발생하며, 이러한 근사가 실제적이려면 맥동에서의 총에너지가 무시할만해도 될 수 있도록 충분히 큰 N 값을 선택해야 한다는 것이다.

(책)[그림 5-10]에서 고조파의 수를 늘려가며 사각 펄스 신호를 근사화하는 과정을 나타내었는데, 그림에서 보면 $N=3$, 즉 3개의 고조파만 더해져도 사각 펄스의 기본 형태는 갖추게 됨을 볼 수 있다. 고조파 항을 추가하여 $N=5$ 가 되면 더욱더 사각 펄스에 가까워지지만 $x(t)$ 가 갖는 날카로운 모서리가 이 합성 신호에는 재현되지 않았다. 왜냐하면 날카로운 모서리는 급격한 변화를 의미하며 이를 재현하기 위해서는 이 합성 신호에는 포함되어 있지 않는 급격히 변하는 (고주파수) 성분이 필요하기 때문이다. $N=19$ 의 경우와 같이 고조파의 수를 점진적으로 증가시키기에 따라 구형파의 모서리는 점점 날카로워지며 신호는 $x(t)$ 에 더욱 유사해진다. 그러나 깁스 현상에 의해 오버슈트와 발진은 사라지지 않는다.

5.2.7 주요 신호의 푸리에 급수

많이 쓰이는 신호들에 대한 푸리에 급수 전개 결과를 [표 C5-2]에 나타내었다.

[표 C5-2] 주요 신호의 푸리에 급수

파형		X_0	$X_k, k \neq 0$	비고
방형파		0	$-j \frac{2A}{\pi k}$	$k=0$ ($k = \text{even}$)
톱니파		$\frac{A}{2}$	$j \frac{A}{2\pi k}$	
삼각파		$\frac{A}{2}$	$-\frac{2A}{(\pi k)^2}$	$k=0$ ($k = \text{even}$)
정류파		$\frac{2A}{\pi}$	$-\frac{2A}{\pi(4k^2 - 1)}$	
반정류파		$\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{\pi(k^2 - 1)}$	$k=0$ ($k = \text{odd}$) $X_1 = -j \frac{A}{4}$
구형파		$\frac{wA}{T_0}$	$\frac{wA}{T_0} \text{sinc} \frac{wk\omega_0}{2\pi}$	
임펄스열		$\frac{A}{T_0}$	$\frac{A}{T_0}$	

5.3 푸리에 변환

5.3.1 주요 신호의 푸리에 변환

(1) 임펄스 신호 $x(t) = \delta(t)$

임펄스 함수의 푸리에 변환은 임펄스 함수의 체거르기 성질로부터 다음과 같이 구해진다.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (\text{C5-36})$$

즉 임펄스 함수에 대한 푸리에 변환쌍은 다음과 같다.

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \quad (\text{C5-37})$$

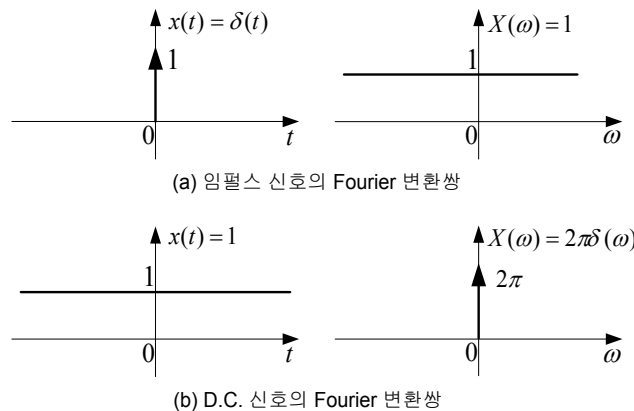
[그림 C5-4(a)]에 임펄스 신호와 스펙트럼을 나타내었다. 그림에서 보듯이 임펄스 신호는 모든 주파수에서 크기 1로 일정한 주파수 성분을 가진다.

(2) DC 신호 $x(t) = 1$

DC 신호는 $\int_{-\infty}^{\infty} |x f(t)| dt = \infty$ 가 되어 디리클레 조건을 만족하지 않는 신호이므로 푸리에 변환이 존재하지 않으나, 전력 신호라는 점에서 다음과 같이 푸리에 변환이 정의된다.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j0t} \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (\text{C5-38})$$

식 (C5-52)의 마지막 등식은 식 (C5-48)에서 $\omega_0 = 0$ 으로 두어 얻어진 것이다. 따라서 DC 신호에 대한 푸리에 변환쌍은 다음과 같고, [그림 C5-4(b)]에 이 변환쌍을 나타내었다.



[그림 C5-4] 임펄스와 D.C.의 푸리에 변환쌍

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (C5-39)$$

(3) 사각 펄스 신호 $x(t)=p_\tau(t)$

다음의 사각 펄스 신호의 푸리에 변환은 식 (C5-55)와 같다.

$$x(t) = \text{rect}_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{그 외} \end{cases} \quad (C5-40)$$

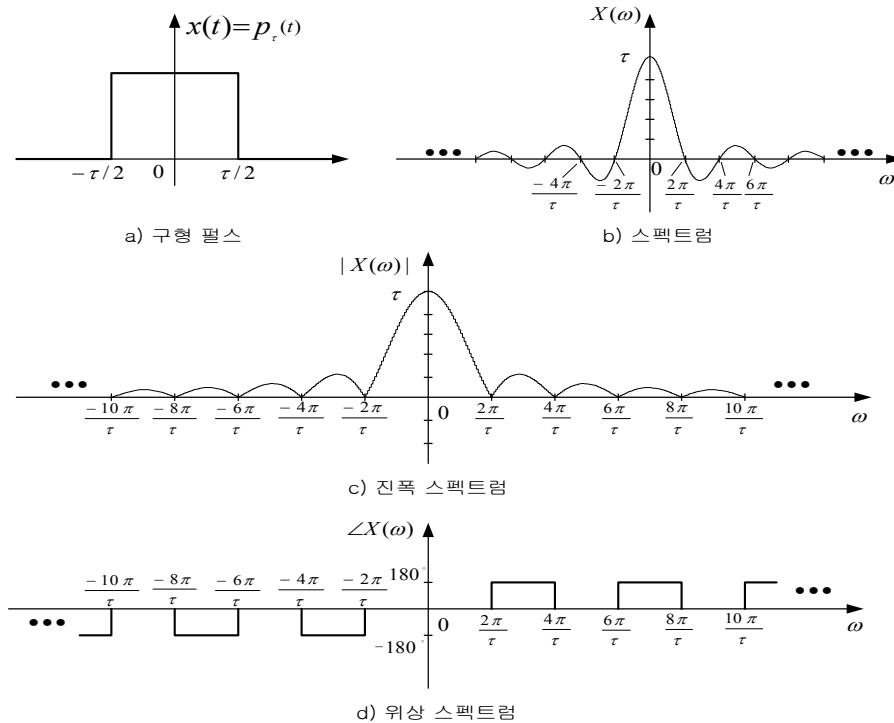
$$X(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} \left(e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right) \quad (C5-41)$$

$$= \tau \frac{2}{\tau\omega} \sin\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) = \tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right)$$

따라서, 사각 펄스의 푸리에 변환쌍은 다음으로 주어진다.

$$\text{rect}_\tau(t) \Leftrightarrow \tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \quad (C5-42)$$

이 결과는 푸리에 급수에서 (책) [예제 5-2]를 통해 살펴본 사각 펄스 주기 신호의 스펙트럼이 sinc 함수로 구해진 것과 일치한다. 이 변환쌍을 [그림 C5-5]에 나타내었다. 그림 (c)와 (d)는 (b)의 스펙트럼을 진폭 스펙트럼과 위상 스펙트럼으로 분리하여 나타낸 것이다.



[그림 C5-5] 사각 펄스의 푸리에 변환과 스펙트럼

(4) 정현파 신호 $x(t) = \cos\omega_0 t$

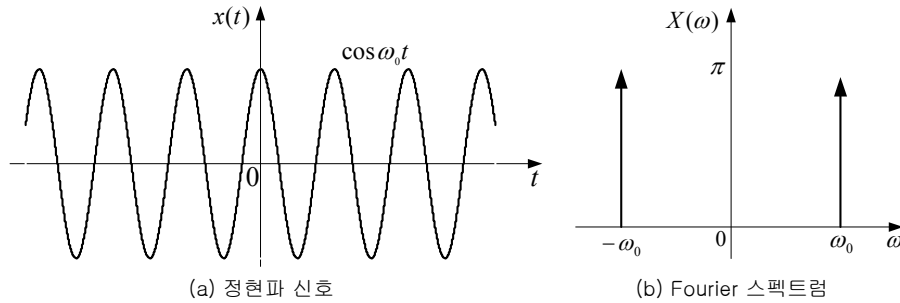
정현파 신호는 오일러 공식에 의해 $\cos\omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2$ 로 표현할 수 있다. $e^{j\omega_0 t}$ 에 대한 푸리에 변환쌍은 (책)식 (5-28)에 주어져 있으므로, 이로부터 $\cos\omega_0 t$ 의 푸리에 변환은 다음과 같이 된다.

$$X(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (\text{C5-43})$$

즉, $\cos\omega_0 t$ 의 푸리에 변환쌍은 다음으로 주어진다.

$$\cos\omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (\text{C5-44})$$

[그림 C5-6]에 이 변환쌍을 나타내었다.



[그림 C5-6] 정현파 신호의 푸리에 변환쌍

(5) 부호(signum) 함수 $x(t) = \text{sgn}(t)$

부호 함수는 디리클레 조건을 만족하는 에너지 신호는 아니지만 전력이 수렴하는 전력 신호이다. 따라서 푸리에 변환을 정의할 수 있는데, 부호 함수는 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$x(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)] \quad (\text{C5-45})$$

실수 지수 신호에 대한 푸리에 변환은 (책)식 (5.22)에 주어져 있으므로 이를 이용하면 부호 함수의 푸리에 변환은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \lim_{a \rightarrow 0} [\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} - \mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\}] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega} \end{aligned} \quad (\text{C5-46})$$

즉, 부호 함수에 대한 푸리에 변환쌍은 다음과 같다.

$$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad (\text{C5-47})$$

(6) (단위) 계단 신호 $x(t) = u(t)$

계단 신호 역시 디리클레 조건을 만족하지 않는 전력 신호의 일종이다. 계단신호는 DC 신호와 부호 함수를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)] \quad (\text{C5-48})$$

이미 구해진 푸리에 변환쌍 식 (C5-53)과 식 (C5-62)로부터 계단 신호의 푸리에 변환은 다음과 같이 된다.

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\text{sgn}(t)\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (\text{C5-49})$$

따라서 계단 신호의 푸리에 변환쌍은 다음으로 주어진다.

$$u(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (\text{C5-50})$$

이상의 결과에서 전력 신호의 푸리에 변환은 임펄스를 포함함을 알 수 있다.

5.3.2 푸리에 변환의 성질

(1) 시간-주파수 쌍대성

■ 예제 C5-2 : sinc 신호의 푸리에 변환(시간-주파수 쌍대성)

sinc 함수에 대한 푸리에 변환은 복잡하게 계산할 것이 아니라 쌍대성을 적용하여, 사각 펄스의 푸리에 변환쌍 식 (C5-42)으로부터 다음과 같이 간단히 구할 수 있다.

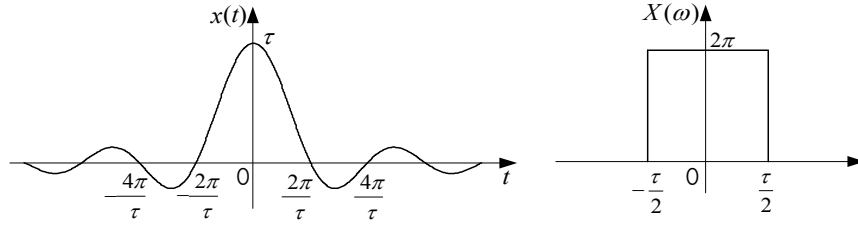
$$X(t) = \tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2\pi}\right) \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega) = 2\pi \text{rect}_\tau(-\omega) = 2\pi \text{rect}_\tau(\omega) \quad (\text{C5-51})$$

이 변환쌍 관계가 유효한지는 다음과 같이 직접 계산에 의해 확인할 수 있다.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 2\pi e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{jt} \left(e^{\frac{j\tau t}{2}} - e^{-\frac{j\tau t}{2}} \right) = \tau \frac{2}{\tau t} \sin\left(\frac{\tau t}{2}\right) = \tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right)$$

[그림 C5-7]은 이 변환쌍을 나타낸 것이다. [그림 C5-5]와 비교하면 t 와 ω 의 역할이 뒤바뀌었다. 이 경우뿐만 아니라 모든 변환쌍에 대해 쌍대성을 적용하여 새로운 변환쌍을 얻

을 수 있다. ■



[그림 C5-7] sinc 신호와 스펙트럼 - 푸리에 변환의 쌍대성

(2) 대칭성

푸리에 변환의 정의식 (책)식 (5-11)의 양변 모두 공액을 취하여, 실수 신호에 대해서는 $x^*(t) = x(t)$ 라는 사실을 이용하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned} [X(\omega)]^* &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) (e^{-j\omega t})^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = X(-\omega) \end{aligned} \quad (\text{C5-52})$$

따라서 실수 신호의 푸리에 변환은 공액 대칭^{conjugate symmetric}이다.

$X(\omega)$ 를 각각 직교좌표 형식과 극좌표 형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$X(\omega) = \text{Re}\{X(\omega)\} + j\text{Im}\{X(\omega)\} \quad (\text{C5-53})$$

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\angle X(\omega)} \quad (\text{C5-54})$$

식 (C5-53)과 식 (C5-52)의 공액 대칭 성질을 결합하면 다음 결과를 얻게 된다.

$$\begin{cases} \text{Re}\{X(\omega)\} = \text{Re}\{X(-\omega)\}, & x(t) \text{는 실수} \\ \text{Im}\{X(\omega)\} = -\text{Im}\{X(-\omega)\}, & x(t) \text{는 실수} \end{cases} \quad (\text{C5-55})$$

즉, 실수 신호 $x(t)$ 의 푸리에 변환의 실수부 $\text{Re}\{X(\omega)\}$ 는 우함수 대칭이고, 허수부 $\text{Im}\{X(\omega)\}$ 는 기함수 대칭이다.

마찬가지로 식 (C5-54)와 식 (C5-52)를 결합하면 다음 결과를 얻게 된다.

$$\begin{cases} |X(\omega)| = |X(-\omega)|, & x(t) \text{는 실수} \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega), & x(t) \text{는 실수} \end{cases} \quad (\text{C5-56})$$

즉, 실수 신호 $x(t)$ 의 진폭 스펙트럼은 우함수, 위상 스펙트럼은 기함수이다.

이러한 대칭성은 이미 (책)[예제 5-7]에서 실수 지수 신호의 푸리에 변환을 구할 때 살펴본 바 있다((책)[그림 5-15] 참조). 식 (C5-55)와 식 (C5-56)의 대칭성에 실수 신호 $x(t)$ 의 대칭성까지 결합시키면 (책)[표 5-2]에 나타낸 것과 같은 더욱 흥미 있는 결과들을 얻을 수 있다.

푸리에 변환의 대칭성은 신호의 해석과 처리에 매우 유용하게 사용된다.

(3) 시간 이동

t_0 만큼 시간 이동된 신호 $x(t-t_0)$ 의 푸리에 변환은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega)\end{aligned}\quad (\text{C5-57})$$

식 (C5-57)은 시간 이동에 대해 진폭 스펙트럼은 바뀌지 않고 위상 스펙트럼만 선형적으로 바뀔음을 의미한다. 이 결과는 푸리에 급수에서 이미 살펴본 결과와 일치한다((책)식 (5-18) 참조).

(4) 시간 척도 변화

[그림 C5-8]에 보인 것처럼, 파형 모양은 그대로 유지한 채 시간축을 따라 신호를 일정한 비율로 잡아 당겨 늘리거나(신장) 눌러 줄이면(압축), 즉 신호의 시간 척도를 바꾸게 되면 주파수 영역에서 스펙트럼이 어떻게 변하는지 살펴보자.

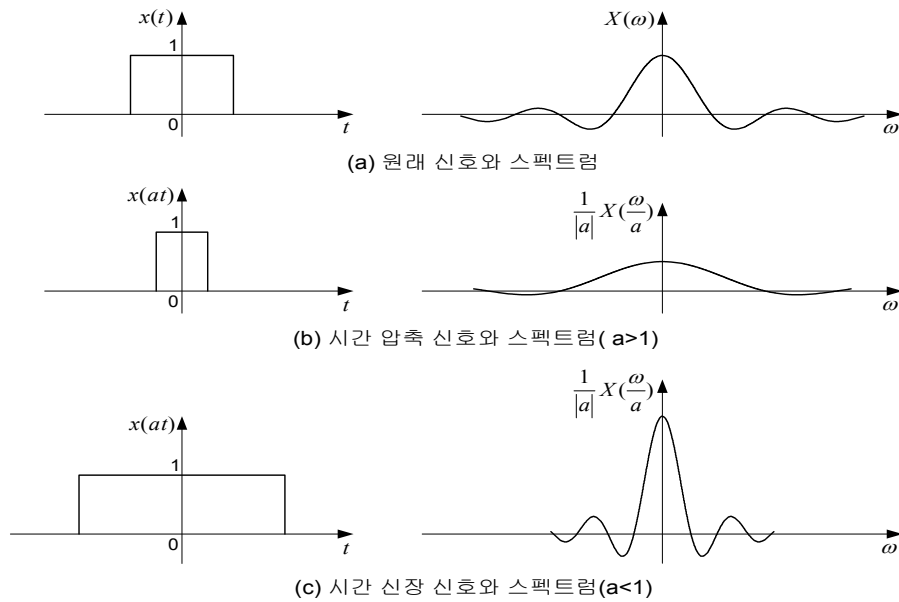
신호에 대한 시간 척도의 변화는 $x(at)$ 로 나타낼 수 있으며, $|a| > 1$ 이면 압축, $|a| < 1$ 이면 신장에 해당된다. 시간 척도가 변화된 신호 $x(at)$ 의 푸리에 변환을 계산해 보면

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}\quad (\text{C5-58})$$

식 (C5-58)은 **시간 영역에서 신호를 압축하면 주파수 스펙트럼은 신장되고, 역으로 신호를 신장시키면 주파수 스펙트럼이 압축된다**는 뜻이다.

이 결과는 신호의 시간 척도 변화에 대한 직관적인 이해와도 잘 부합한다. 시간적으로 신호를 압축하면 신호의 변화가 빨라진다. 따라서 이런 신호를 합성하기 위해서는 더 높은 주파수의 고조파 성분이 필요하게 되므로 스펙트럼의 폭이 넓어지게 되는 것이다. 마찬가지로 시간적으로 신장된 신호는 더욱 느리게 변화하므로 신호 성분들의 주파수는 낮아질 것이고 이에 따라 스펙트럼의 폭은 줄어들게 된다. [그림 C5-8]은 이런 결과를 잘 보여주고 있다.

이런 효과의 예로 오디오 테이프에 목소리를 녹음하여 재생하는 경우를 생각해볼 수 있다. 재생 속도가 녹음 속도보다 빠르면(시간 압축) 스펙트럼이 확장되므로 목소리의 옥타브가 높아진다. 이와 반대로 재생 속도가 더 느리면(시간 신장)에는 주파수 대역이 낮아져서 저음의 굵은 남자 음성처럼 들리게 된다.



[그림 C5-8] 푸리에 변환의 시간 척도 변화 성질

(5) 시간 컨벌루션

선형 시불변 시스템의 입력에 대한 출력은 입력과 임펄스 응답의 컨벌루션으로 주어진다. 이것을 이미 배운 바 있다. 따라서 두 신호의 컨벌루션에 대한 푸리에 변환을 구해보자.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t') e^{j\omega t'} dt' \right] e^{-j\omega \tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t') e^{j\omega t'} dt' = X_1(\omega) X_2(\omega)
 \end{aligned}
 \tag{C5-59}$$

즉, 시간 영역에서 두 신호의 컨벌루션은 주파수 영역에서 각 신호의 푸리에 변환(스펙트럼)의 곱하기가 된다. 이것은 3장에서 살펴보았듯이 컨벌루션의 계산이 매우 복잡하다는 점을 생각하면 매우 놀라운 결과이다. 바로 이 때문에 우리는 많은 경우 주파수 영역에서 시스템을 다루게 된다.

(6) 파스발 정리

푸리에 급수의 성질을 다룰 때, 파스발 정리를 통해 시간 영역에서 신호의 전력과 푸리에 급수로 표현된 각 주파수 성분의 전력을 연관 지은 바 있다. 주기 신호는 전력 신호로서 총 에너지가 무한대이기 때문에 에너지 관계를 살펴보는 데 어쩔 수 없이 전력을 이용하였지만, 푸리에 변환이 존재하는 신호, 즉 디리클레 조건을 만족하는 신호는 에너지 신호이므로 직접 에너지 관계를 살펴보는 것도 얼마든지 가능하다.

신호의 에너지의 정의와 푸리에 변환을 이용하면 다음 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt & (C5-60) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

식 (C5-60)은 푸리에 급수에서와 마찬가지로 신호의 시간 영역에서의 에너지 총합은 각 스펙트럼 성분의 에너지를 모두 더한 것과 같다는 것을 보여준다.

$|X(\omega)|^2$ 은 신호 $x(t)$ 가 갖는 에너지의 주파수 분포를 알려주기 때문에 에너지 밀도 스펙트럼이라고 한다. 에너지 밀도 스펙트럼은 스펙트럼의 크기에만 의존하기 때문에 같은 에너지 밀도 스펙트럼을 가지는 신호가 여러 개 존재할 수 있다. 그러나 어떤 신호이든 오직 하나의 에너지 밀도 스펙트럼만을 가진다.

■ 예제 C5-3 : 임펄스의 푸리에 변환쌍을 이용한 푸리에 변환

직선 성분들로 구성되는 신호들의 경우 계속 미분을 수행하면 임펄스 열들만 남게 된다. 임펄스 함수의 푸리에 변환은 1이므로 이에 시간 미분 성질, 시간 이동 성질과 선형성을 적용하면 매우 쉽게 푸리에 변환을 구할 수 있다.

하나의 예로 [그림 C5-9]에 나타난 삼각 펄스의 푸리에 변환을 구해보자. [그림 C5-9(a)]에 주어진 삼각 펄스 신호는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t) = \Delta_{\tau}(t) = -\frac{2}{\tau}|t| + 1, \quad |t| < \frac{\tau}{2}$$

이를 한번 미분하면 그림 (b)와 같이 되고, 두 번 미분하면 그림 (c)처럼 임펄스 열만 남는다. 즉,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{2}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

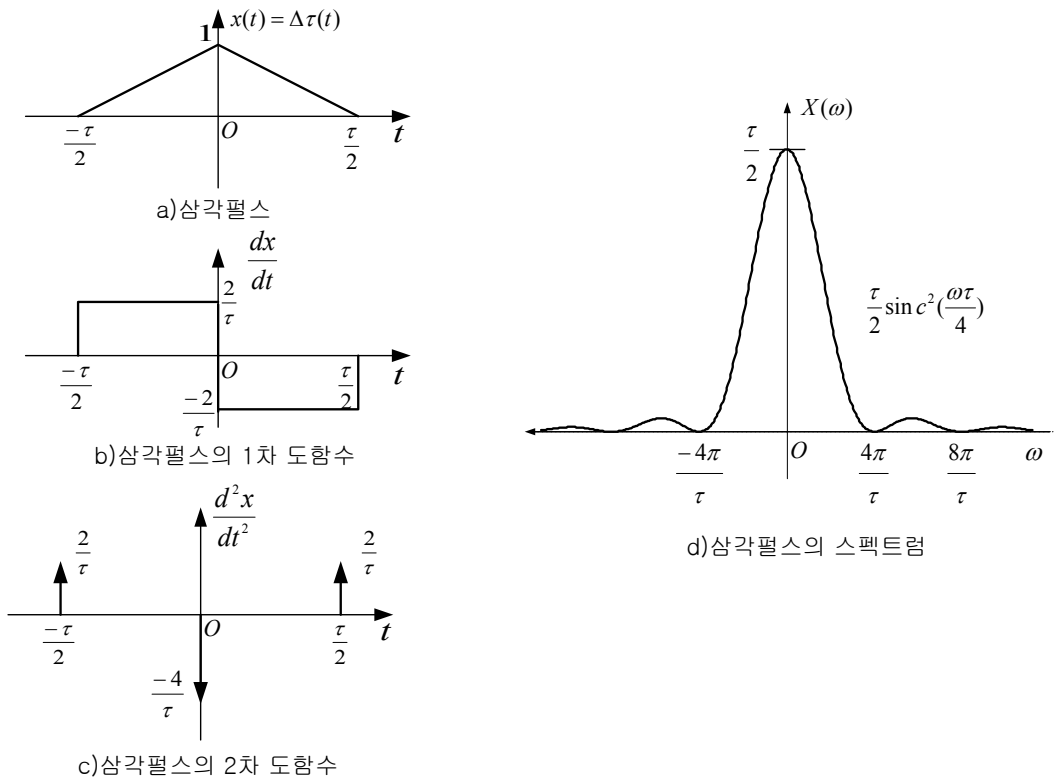
위 식을 푸리에 변환하면 다음과 같다.

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right\} = \frac{2}{\tau} \left[d^{j\omega \frac{\tau}{2}} - 2 + e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \right] = \frac{4}{\tau} \left[\cos \frac{\tau\omega}{2} - 1 \right] = -\frac{8}{\tau} \sin^2 \frac{\tau\omega}{4}$$

따라서 이 결과와 푸리에 변환의 미분 성질을 결합하여 삼각 펄스의 푸리에 변환을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$X(\omega) = \frac{8}{\tau\omega^2} \sin^2 \left(\frac{\tau\omega}{4} \right) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{4}{\tau\omega} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\tau\omega}{4} \right) = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2 \left(\frac{\tau\omega}{4} \right)$$

그림 (d)는 이 스펙트럼을 그린 것이다. ■



[그림 C5-9] 임펄스의 푸리에 변환쌍을 이용한 푸리에 변환 예