

임펄스 응답과 컨벌루션

책의 '2절 임펄스 응답'에 대해서는 FIR 시스템과 IIR 시스템에 대한 상세한 보충 설명과 예를 제시하였다.

책의 '3절 시스템의 컨벌루션 표현'과 관련해서는 컨벌루션의 다른 유도 방법 및 관련 예제를 추가하였다.

책의 '4절 컨벌루션의 계산과 성질'과 관련해서는 컨벌루션 계산의 이해를 도울 수 있는 예제와 책에서 제대로 다루지 않은 몇 가지 컨벌루션의 성질에 대해 추가 설명을 보충하였다.

책의 '5절 임펄스 응답과 시스템의 특성'과 관련해서는 필터 등의 시스템을 다룰 때 확실하게 알아두어야 할 시정수의 개념과 관련하여 필요한 사항들을 쉽고 충분한 정도로 설명하였다. 그리고 점근적 안정도의 개념에 대해서도 설명을 추가하였다.

4.2 임펄스 응답

FIR 시스템과 IIR 시스템

입력의 평균값을 구하는 문제를 생각해보자. $m+1$ 개의 입력 신호를 누적하여 평균값을 구한다고 하면 입출력 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$y[n] = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x[n-k] = \sum_{k=0}^m \frac{1}{m+1} x[n-k] \quad (\text{C4.1})$$

이 시스템의 임펄스 응답을 $h[n]$ 이라 하고 입출력 관계를 컨벌루션으로 나타내면 다음과 같다.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (\text{C4.2})$$

총합 하한이 0이 된 것은 시스템이 인과적이기 때문이다.

식 (C4.1)의 m 이 유한한 경우와 m 이 매우 커서 무한대에 가까워지는 두 가지 경우로 나누어 살펴보자.

먼저 $m=q$ 로 유한한 경우, $\frac{1}{m+1} = h[k]$ 로 치환하면 식 (C4.1)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^q h[k] x[n-k] \\ &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots + h[q]x[n-q] \end{aligned} \quad (\text{C4.3})$$

식 (C4.3)은 임펄스 응답의 길이가 유한한 FIR 시스템의 컨벌루션 표현이다.

만약 $\frac{1}{m+1} = b_k$ 로 치환하게 되면 식 (C4.1)은 다음과 같이 이동 평균(MA) 항으로만 이루어진 차분 방정식이 된다.

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \cdots + b_qx[n-q] \quad (\text{C4.4})$$

식 (C4.3)과 식 (C4.4)를 비교하면, 차분 방정식의 상수 계수 b_k 가 FIR 시스템의 임펄스 응답 $h[k]$ 와 같으면 차분 방정식 표현과 컨벌루션 표현이 완전히 일치함을 알 수 있다. 다시 말해 **FIR 시스템의 차분 방정식은 입력의 이동 평균 항들로만 구성된다.**

m 이 매우 큰 경우는 이런 방법으로 해서는 식 (C4.2)와 등가인 차분 방정식의 항의 개수가 무한히 커지므로 소용이 없다. 따라서, 컨벌루션 표현과 차분 방정식의 관계를 끌어낼 수 있도록 식을 바꾸어 나타내보자. 직전의 출력 $y[n-1]$ 을 이용하여 식 (C4.1)을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \frac{1}{m+1} \left(x[n] + \sum_{k=0}^m x[n-1-k] - x[n-m-1] \right) \\
 &= y[n-1] + \frac{1}{m+1} x[n] - \frac{1}{m+1} x[n-m-1]
 \end{aligned} \tag{C4.5}$$

식 (C4.5)는 식 (C4.1)과 달리 m 이 얼마가 되든지 간에 단지 3개의 항만을 사용하여 시스템의 입출력 관계를 차분 방정식 형태로 표현하고 있다.

이 예로부터 식 (C4.2)의 총합 상한이 ∞ 가 되는 **IIR 시스템은 식 (C4.5)와 같이 자기 회귀(AR) 항을 포함하는 차분 방정식으로 나타낼 수 있음**을 미루어 알 수 있다.

식 (C4.1)을 식 (C4.5)로 변환하는 데 m 의 크기에 대한 특별한 조건이 없으므로 FIR 시스템의 경우에도 얼마든지 자기 회귀 항을 포함하는 차분 방정식으로 표현을 변환할 수 있으며, 실제 응용에서 그렇게 하는 것이 더 효율적인 경우도 많다.

■ 예제 C4-1 : 데이터 평활화(smoothing)

국제적으로 금이나 석유 등을 거래하는 현물 시장이나 주식 시장에서는 여러 요인에 의해 매일 매시간 가격이 달라진다. 딜러들은 순간의 결정으로 엄청난 이익이나 손실이 발생할 수 있는 까닭에 가격의 변동을 정확히 예측하기 위하여 필사적으로 애를 쓴다.

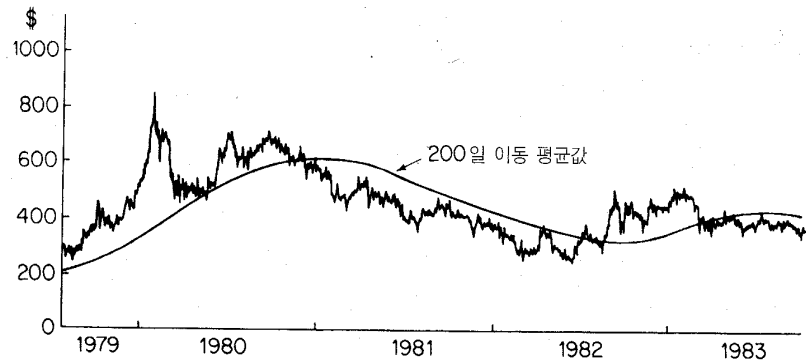
[그림 C4-1]은 달러로 표시된 금값의 변화를 1979년에서 1983년까지 일별로 나타낸 그래프이다. 그림에서 보듯이 금값은 작은 폭의 지속적인 변동과 큰 폭의 심한 기복을 모두 포함하는 복잡한 양상을 보인다. 이러한 패턴은 석유나 주식의 경우도 크게 다르지 않다.

가격의 변동을 예측하려면, 단기적인 변화뿐만 아니라 장기적인 변동 추이를 분석할 필요가 있다. 그림에 나타나 있는 부드러운 곡선은 정확히 일치하지는 않지만, 장기간에 걸친 금값의 변화 추이를 잘 파악할 수 있게 해준다. 이처럼 원래 데이터의 복잡한 변화를 줄여서 데이터에 내재되어 있는 잠재적인 경향을 드러내는 부드러운 곡선을 찾아내는 일을 데이터 평활화라고 하는데, 기본적으로 널리 사용되는 기법은 적당한 기간 동안 누적된 데이터의 평균, 즉 이동 평균(moving average)을 취하는 방법이다.

[그림 C4-1]의 부드러운 곡선은 현물 시장이나 주식 시장의 분석가들이 경험 법칙상 찾아낸 누적 기간인 200일 동안의 이동 평균을 취한 것으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y[n] = \frac{1}{200} \{ x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-199] \} = 0.005 \sum_{k=0}^{199} x[n-k] \tag{C4.6}$$

만약 평균을 취하는 누적 기간을 다르게 선정하면 곡선의 형태도 달라질 것이며, 데이터에 따라 최적의 누적 기간을 찾아내는 일이 중요한 문제가 될 것이다.



[그림 C4-1] 금의 달러화 값 1979-1983

그런데 식 (C4.6)은 $y[n]$ 값을 계산하기 위해서 매번 200개 데이터의 덧셈을 수행해야 하므로 계산상의 관점에서는 효율적이지 못하다. 좀 더 효율적인 계산 구조 표현으로 바꾸려면 다음과 같이 직전의 계산 결과에서 가장 오래된 입력 데이터를 빼서 버리고 새로운 데이터를 더하면 될 것이다. 즉,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{200} \{ x[n] + \dots + x[n-199] + x[n-200] - x[n-200] \} \\ &= y[n-1] + 0.005 \{ x[n] - x[n-200] \} \end{aligned} \quad (\text{C4.7})$$

여기서

$$y[n-1] = \frac{1}{200} \{ x[n-1] + \dots + x[n-199] + x[n-200] \} \quad (\text{C4.8})$$

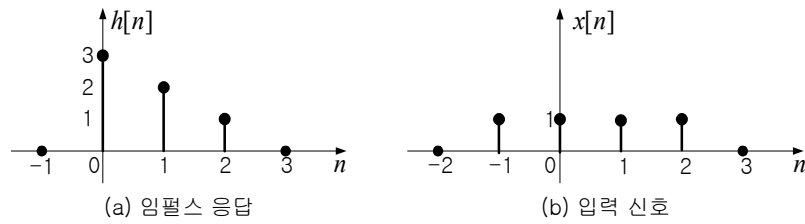
식 (C4.8)의 계산은 각 한 번의 덧셈과 뺄셈만 필요하므로, 식 (C4.7)에 비해 계산량 측면에서 매우 효율적이다. 식 (C4.8)과 같은 형태의 계산 알고리즘(또는 필터)은 직전의 계산값이 다시 새로운 계산을 위한 입력으로 사용되므로 **순환**^{recursive} 알고리즘이라고 한다. 이에 반해 식 (C4.7)처럼 이전의 계산값을 전혀 사용하지 않는 알고리즘은 **비순환**^{nonrecursive} 알고리즘이라고 한다. ■

4.3 시스템의 컨벌루션 표현

4.3.1 이산 LTI 시스템의 컨벌루션 표현

■ 예제 C4-2 : 선형성과 시불변성을 이용한 이산 시스템의 응답 - 컨벌루션

[그림 C4-2]는 이산 LTI 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$ 과 입력 신호 $x[n]$ 을 나타낸 것이다. 이 입력에 대한 시스템의 출력을 구해보자.



[그림 C4-2] [예제 C4-2]의 임펄스 응답과 입력 신호

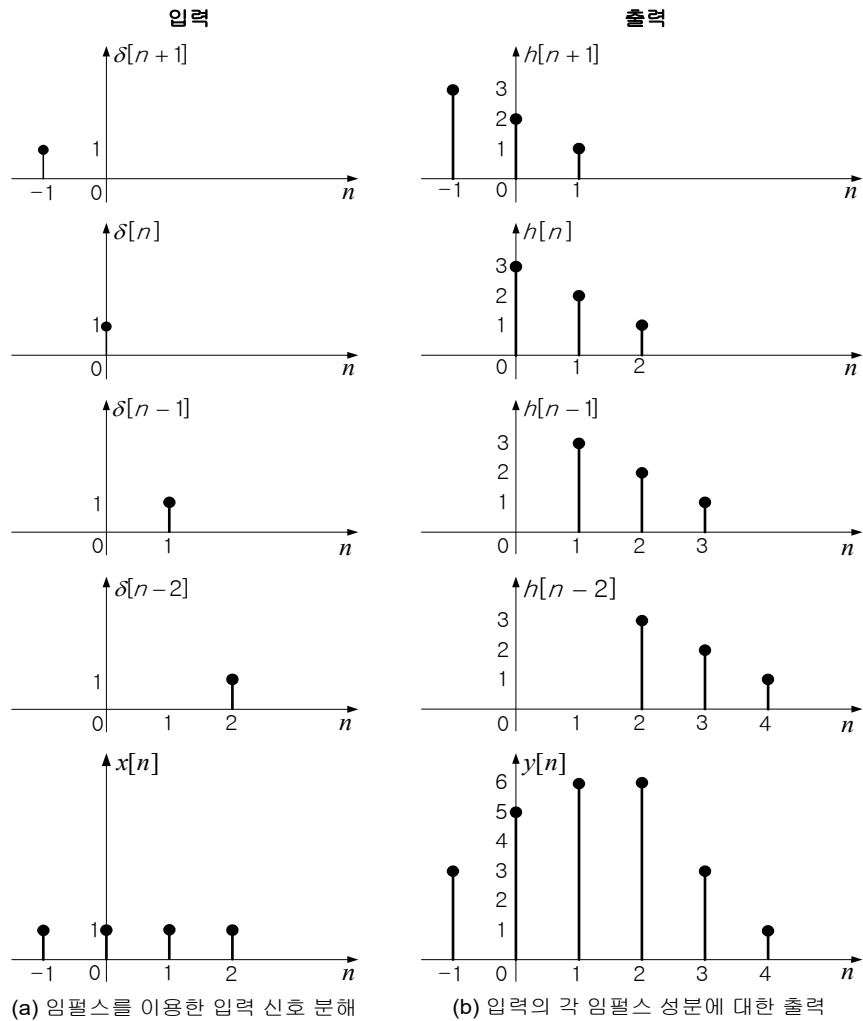
$x[n]$ 은 (책)식 (4.4)에 의해 다음과 같이 임펄스 성분들의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x[n] &= (-1) \cdot \delta[n+1] + 0 \cdot \delta[n] + 1 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] \\ &= \sum_{k=-1}^2 x[k] \delta[n-k] \end{aligned}$$

[그림 C4-3(a)]는 이런 $x[n]$ 의 분해 결과를 나타낸 것이다. 선형성(중첩의 원리)을 적용하여 각 임펄스 성분 $x[k]\delta[n-k]$ 에 대한 시스템 응답을 모두 합하면 시스템의 출력을 얻게 된다. 이때 시불변성에 의해 $x[k]\delta[n-k]$ 에 대한 시스템 응답은 [그림 C4-3(b)]에 나타난 것처럼 $x[k]h[n-k]$ 가 되고, 이들을 모두 더하면 $y[n]$ 이 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= (-1) \cdot h[n+1] + 0 \cdot h[n] + 1 \cdot h[n-1] + 2 \cdot h[n-2] \\ &= \sum_{k=-1}^2 x[k] h[n-k] \end{aligned} \quad (C4.9)$$

결국 선형성과 시불변성에 의해 시스템의 출력이 식 (C4.9)와 같이 컨벌루션 관계로 표현된 것을 알 수 있다. [그림 C4-3]의 계산 과정은 계산이 특정한 n 값에 대해 진행되는 것이 아니라 k 에 대해 -1, 0, 1, 2의 순서로 계산이 먼저 수행된 다음, 최종적으로 각 n 값에 대한 결과를 얻는 방식이다. 이와 같은 계산 방법은 계산이 시간의 흐름을 따라 진행되지 않을 뿐만 아니라 $x[n]$ 의 길이가 긴 경우에는 비효율적이므로 바람직한 방법은 아니다. 따라서 미끄럼 방식으로 계산하는 것이 일반적이다. ■



[그림 C4-3] 임펄스의 중첩에 의한 이산 시스템 출력 계산 : 컨벌루션

4.3.2 연속 LTI 시스템의 컨벌루션 표현

컨벌루션 표현의 유도

연속 LTI 시스템의 컨벌루션 수식 표현을 책의 설명과는 다른 방법으로 접근해보자. (책)식 (4.11)에서부터 시작하는 것은 책의 설명과 같다.

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(t) &= \cdots + x(0)\Delta\delta_{\Delta}(t) + \cdots + x(k\Delta)\Delta\delta_{\Delta}(t-k\Delta) + \cdots \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\Delta\delta_{\Delta}(t-k\Delta)
 \end{aligned}
 \quad (\text{책})(4.11)$$

책과는 달리 (책)식 (4.11)에서 먼저 $\Delta \rightarrow 0$ 의 극한을 취하면, $\tilde{x}(t)$ 는 $x(t)$ 가 되고 총합은 적분으로, $k\Delta$ 는 τ , Δ 는 $d\tau$, 그리고 $\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$ 는 $\delta(t-\tau)$ 로 바뀌어 다음과 같이 된다.

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (\text{C4.10})$$

식 (C4.10)의 입력 신호에 대한 선형 시불변 시스템 L 의 출력 $y(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$y(t) = L\{x(t)\} = L\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} \quad (\text{C4.11})$$

식 (C4.11)은 시스템의 선형성에 의해

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L\{x(\tau) \delta(t - \tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) L\{\delta(t - \tau)\} d\tau \quad (\text{C4.12})$$

이 되고, 이에 시불변성을 적용하면 다음과 같이 입출력 관계를 표현하는 수식이 얻어진다.

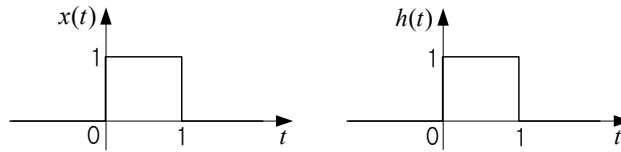
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{C4.13})$$

4.4 컨벌루션의 계산과 성질

4.4.1 컨벌루션 연산의 이해와 계산

■ 예제 C4-3 : 미끄럼 방식 컨벌루션 계산

[그림 C4-4]의 신호 $x(t)$ 와 $h(t)$ 의 컨벌루션 $y(t) = x(t) * h(t)$ 를 구하고 그려라.



[그림 C4-4] [예제 C4-3]의 신호 $x(t)$, $h(t)$

① [그림 C4-5(a)]와 같이 시간축을 t 에서 τ 로 바꾸고 $h(\tau)$ 를 뒤집어 $h(-\tau)$ 를 얻는다.

② $h(-\tau)$ 를 이동시킨 $h(t-\tau)$ 가 $x(\tau)$ 와 겹쳐지는 양상에 따라 계산 구간을 나눈다.

$t < 0$: 전혀 겹치지 않음

$0 \leq t < 1$: $h(t-\tau)$ 가 $x(\tau)$ 에 겹치는 부분이 점점 증가([그림 C4-5(b)])

$t = 1$: $h(t-\tau)$ 가 $x(\tau)$ 에 완전히 겹침([그림 C4-5(c)])

$1 < t \leq 2$: $h(t-\tau)$ 가 $x(\tau)$ 에 겹치는 부분이 점점 감소([그림 C4-5(d)])

$t > 2$: 전혀 겹치지 않음

③ $h(t-\tau)$ 가 $x(\tau)$ 와 겹치는 세 구간에 대해서만 컨벌루션 적분 계산을 수행한다.

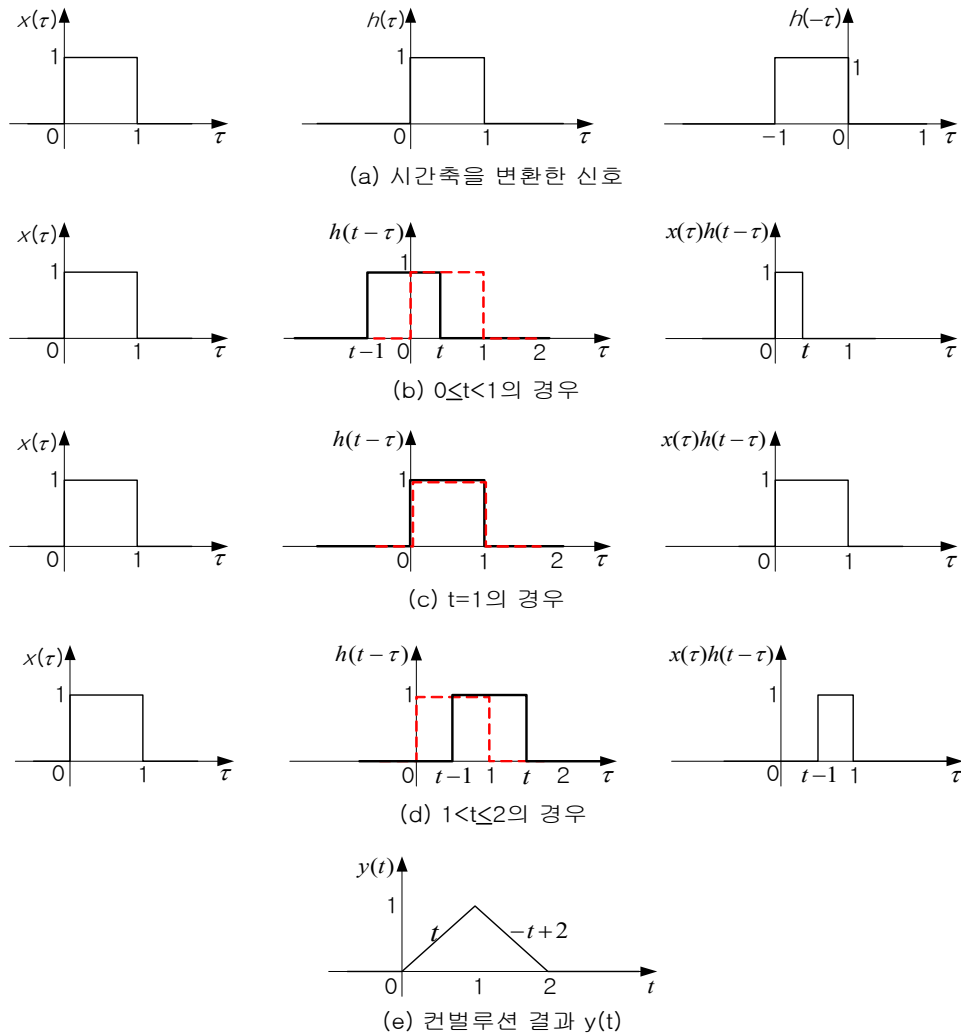
$$0 \leq t < 1 : y(t) = \int_0^t 1 d\tau = \tau \Big|_0^t = t$$

$$t = 1 : y(t) = \int_0^1 1 d\tau = \tau \Big|_0^1 = 1$$

$$1 < t \leq 2 : y(t) = \int_{t-1}^1 1 d\tau = \tau \Big|_{t-1}^1 = -t + 2$$

④ 얻은 결과들을 모아서 [그림 C4-5(e)]와 같이 $y(t)$ 를 그리면 된다. 그림에서 보듯이 너비가 같은 사각 펄스 둘을 컨벌루션하면 너비가 두 배인 삼각 펄스가 얻어진다.

이처럼 그림을 이용하면 쉽고 간편하게 컨벌루션 계산을 할 수 있다. **계산할 때 적분의 하한과 상한이 바르게 결정되도록 주의를 기울여야 한다.** ■



[그림 C4-5] 그림을 이용한 [예제 C4-3]의 미끄럼 방식 컨벌루션 계산

컨벌루션 합의 계산

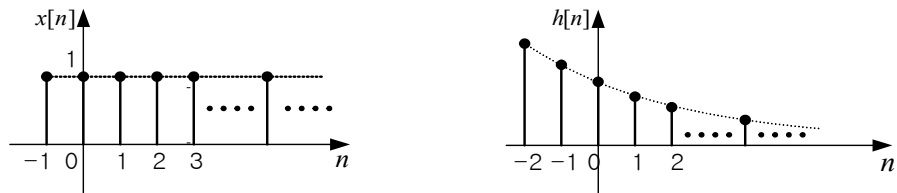
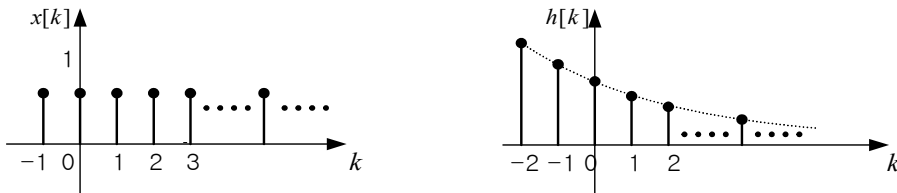
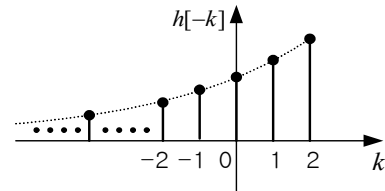
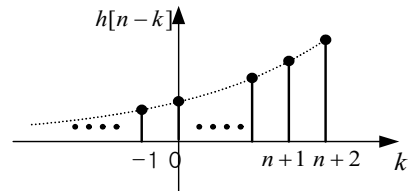
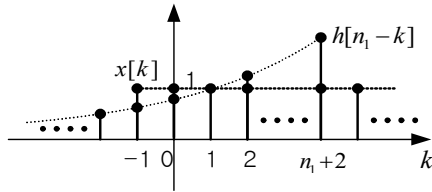
컨벌루션 계산이 진행되는 시간축과 결과가 표시되는 시간축을 혼동하면 안 된다는 것을 강조한 바 있다. 이를 좀 더 자세히 알아보기 위해 [그림 C4-6]의 경우를 살펴보자.

그림 (a)에 주어진 신호 $x[n]$ 와 $h[n]$ 에 대해 (b)처럼 시간 변수를 k 로 변환한 뒤, (c)와 같이 두 신호 중 하나(여기서는 $h[k]$)를 시간 반전시키면 $h[-k]$ 가 된다. 그런 다음 이를 n 만큼 이동시키면, (d)와 같이 $h[n-k]$ 가 얻어진다. $h[n-k] = h[-(k-n)]$ 이므로 n 이 양의 값이면 오른쪽으로 이동하고 음의 값이면 왼쪽으로 이동된다.

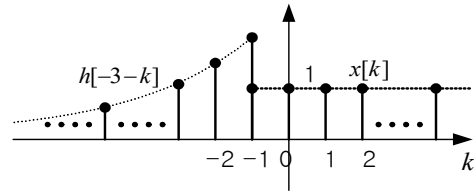
특정한 시간 $n = n_1$ 에서의 컨벌루션 값 $y[n_1]$ 은 (e)의 그림처럼 두 신호 $x[k]$ 와 $h[n_1-k]$ 를 곱하여 얻어진 결과의 각 샘플값들을 전부 더한 것으로서, $y[n_1]$ 은 (h)에 보인 것처럼 시간축을 n 으로 하는 평면에 표시된 $y[n]$ 곡선 상의 한 점이 된다. 다시 n 값을 변화시켜 같은 작업을 반복하면 $y[n]$ 곡선 상의 또 다른 점의 값을 얻을 수 있다.(그림 (f)) 그런데 $n < -3$

이때 $x[k]$ 와 $h[n-k]$ 가 겹치는 부분이 없어서 구태여 컨벌루션 계산을 수행할 필요가 없음을 알 수 있으며(그림 (g)), 보통의 경우에는 이 과정을 $-\infty$ 와 $+\infty$ 사이의 모든 n 값에 대해 반복함으로써 완전한 컨벌루션 결과 $y[n]$ 을 구하게 된다.(그림 (h))

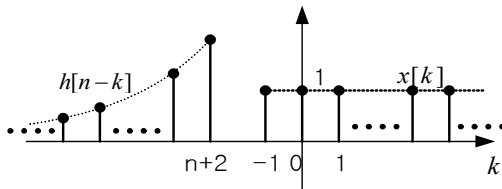
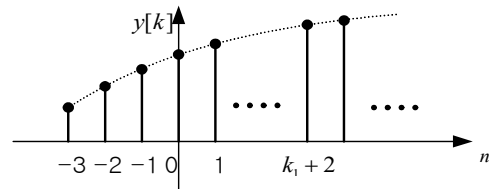
이처럼 그림을 이용하면 컨벌루션 계산을 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

(a) 신호 $x[n]$ 과 $h[n]$ (b) 시간변수의 변환($n \rightarrow k$)(c) $h[k]$ 의 시간반전($h[-k]$)(d) $h[-k]$ 의 시간이동($h[n-k]$)(e) $n=n_1$ 에서의 컨벌루션 합

$$y[n_1] = \sum_{k=-1}^{n_1+2} h[n_1-k]$$

(f) $n=-3$ 에서의 컨벌루션 합

$$y[-3] = h[-2]$$

(g) $x[k]h[n-k]=0, n < -3$ (h) 컨벌루션 결과 ($y[n]$)

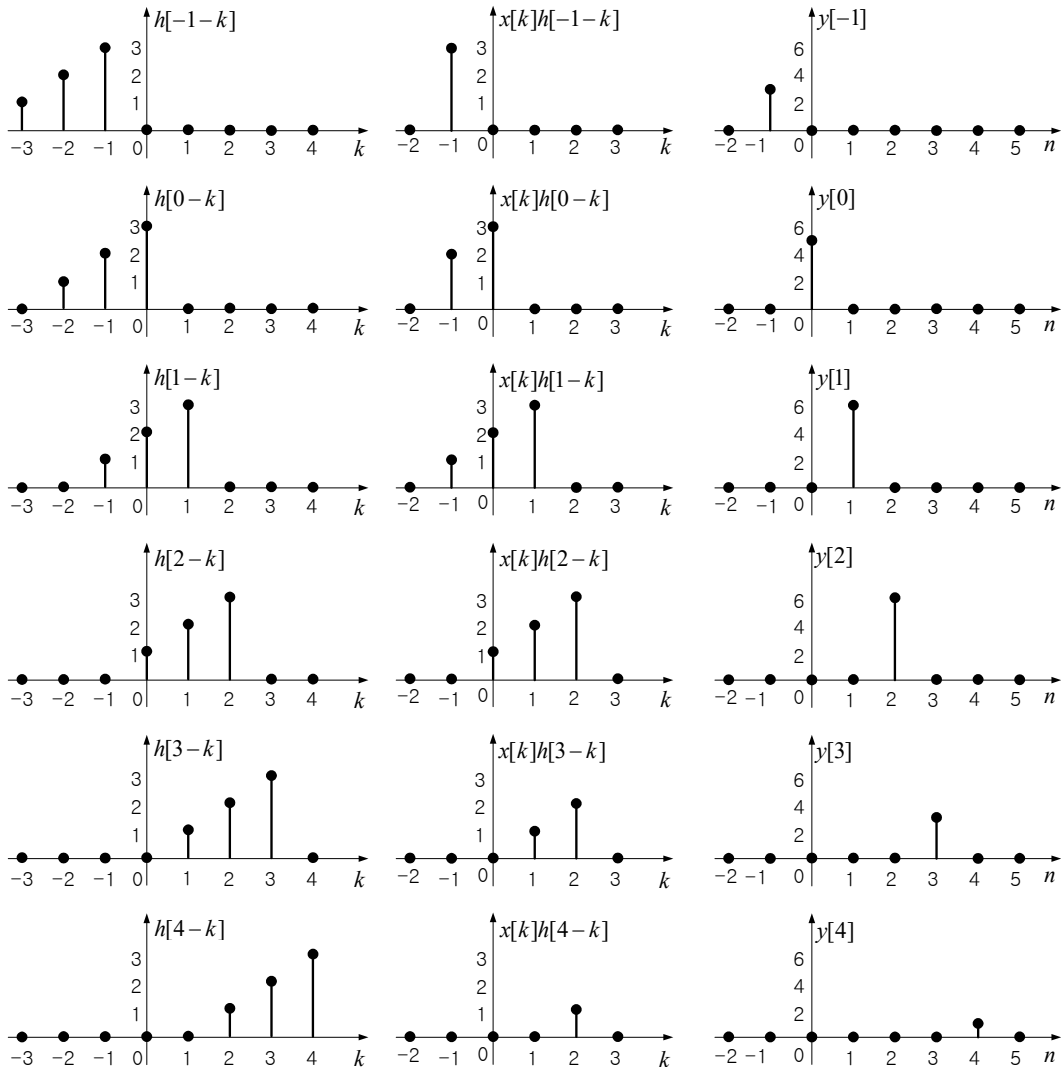
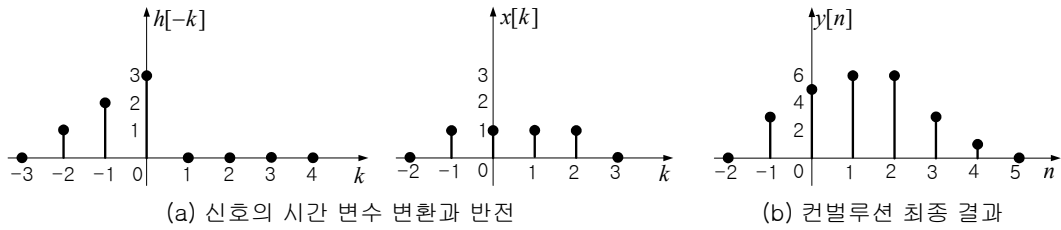
[그림 C4-6] 그림을 이용한 컨벌루션 합의 설명

■ 예제 C4-4 : 미끄럼 방식에 의한 컨벌루션 계산

[예제 C4-2]에 대해 미끄럼 방식으로 컨벌루션 계산을 수행하라.

[그림 C4-7(a)]처럼 시간축을 k 로 바꾸고 $h[k]$ 를 뒤집어 $h[-k]$ 를 구한다. $h[-k]$ 를 n 만

큼 시간 이동시킬 때 $x[k]$ 와 $h[-k]$ 가 전혀 겹치지 않는 구간은 $n < -1$ 과 $n > 4$ 이고, 이때 출력은 $y[n] = 0$ 이다. [그림 C4-7(c)]와 같이 $n = -1$ 에서부터 시작하여 $n = 4$ 까지 $h[-k]$ 를 한 칸씩 오른쪽으로 이동시킬 때마다 매번 두 신호를 곱한 결과를 모두 더하면 그 n 값 순간의 컨벌루션 값이 된다. 이를 시간축을 n 으로 하여 모두 나타내면 $y[n] = x[n] * h[n]$ 을 구할 수 있다.



[그림 C4-7] 미끄럼 방식에 의한 [예제 C4-4]의 컨벌루션 계산

이 결과는 다음 같이 (책)식 (4.8)에 n 을 1씩 증가시키며 대입하여 계산한 것과 일치한다.

$$\begin{aligned}
 n = -1 : & \quad y[-1] = x[-1]h[0] + x[0]h[-1] + x[1]h[-2] + x[2]h[-3] \\
 n = 0 : & \quad y[0] = x[-1]h[1] + x[0]h[0] + x[1]h[-1] + x[2]h[-2] \\
 n = 1 : & \quad y[1] = x[-1]h[2] + x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[-1] \\
 n = 2 : & \quad y[2] = x[-1]h[3] + x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] \\
 n = 3 : & \quad y[3] = x[-1]h[4] + x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] \\
 n = 4 : & \quad y[4] = x[-1]h[5] + x[0]h[4] + x[1]h[3] + x[2]h[2]
 \end{aligned}$$

[그림 C4-7]의 계산 과정을 간편화하여 표로 작성하면 [표 C4-1]과 같다.

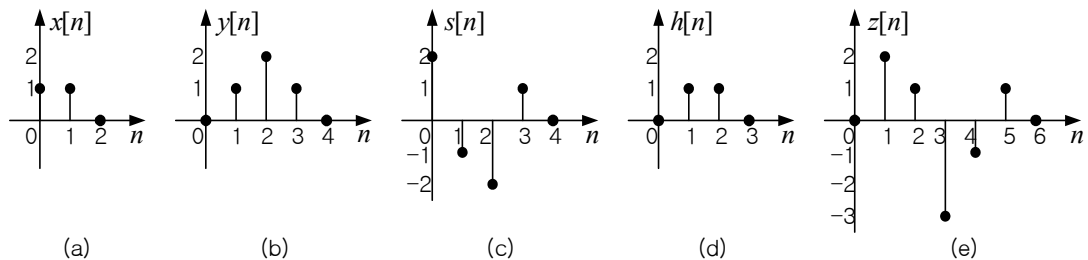
[표 C4-1] [예제 C4-4]의 미끄럼 방식 컨벌루션 계산표

$n \backslash k$		-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
$x[k]$				1	1	1	1			$y[n]$
$h[n-k]$	-1	1	2	3						3
	0		1	2	3					5
	1			1	2	3				6
	2				1	2	3			6
	3					1	2	3		3
	4						1	2	3	1

[표 C4-1]에서 $n = [-1, 0]$ 은 두 신호가 부분적으로 겹치면서 겹치는 부분이 증가하는 구간, $n = [1, 2]$ 는 두 신호가 완전히 겹치는 구간, $n = [2, 3]$ 은 두 신호가 부분적으로 겹치면서 겹치는 부분이 감소하는 구간임을 알 수 있다. ■

■ 예제 C4-5 : 미끄럼 방식에 의한 컨벌루션 계산

이산 LTI 시스템에 [그림 C4-8(a)]의 $x[n]$ 을 입력으로 넣었을 때 출력이 [그림 C4-8(b)]의 $y[n]$ 과 같이 되는 이산 LTI 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$ 을 구하고, 이를 이용하여 [그림 C4-8(c)]의 $s[n]$ 을 입력으로 할 때의 시스템 출력 $z[n]$ 을 구하라.



[그림 C4-8] [예제 C4-5]의 신호들

먼저 임펄스 응답을 구하기 위해 $x[n]$ 을 임펄스 성분으로 분해하면 $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ 이다. 이에 대한 출력은 $y[n] = h[n] + h[n-1]$ 이 된다. 여기에 n 을 1씩 증가시키며 대입하면 다음의 결과를 얻는다. 이렇게 구해진 임펄스 응답 $h[n]$ 을 [그림 C4-8(d)]에 나타내었다.

$$\begin{array}{lll} n=0 : y[0] = h[0] = 0 & \therefore h[0] = 0 \\ n=1 : y[1] = h[1] + h[0] = 1 & \therefore h[1] = 1 \\ n=2 : y[2] = h[2] + h[1] = 2 & \therefore h[2] = 1 \\ n=3 : y[3] = h[3] + h[2] = 1 & \therefore h[3] = 0 \end{array}$$

이제 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$ 을 알고 있으므로 입력 $s[n]$ 에 대한 시스템 출력 $z[n]$ 을 컨벌루션을 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$z[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=0}^3 s[k] h[n-k]$$

이 컨벌루션에 대한 미끄럼 방식 계산표를 작성하면 [표 C4-2]와 같고, 이에 의해 구해진 출력 $z[n]$ 을 [그림 C4-8(e)]에 보였다.

[표 C4-2] [예제 C4-5]의 미끄럼 방식 컨벌루션 계산표

$n \backslash k$		0	1	2	3	
$s[k]$		2	-1	-2	1	$z[n]$
$h[n-k]$	1	1				2
	2	1	1			1
	3		1	1		-3
	4			1	1	-1
	5				1	1

[표 C4-2]의 작성은 칸이 질러진 두 개의 테이프에 하나는 왼쪽 끝에서부터 각 칸에 순서대로 $s[k]$ 의 값을 적고($\boxed{2} \boxed{-2} \boxed{-1} \boxed{1}$) 다른 하나는 정반대로 오른쪽 끝에서부터 순서대로 $h[k]$ 의 값을 적어($\boxed{1} \boxed{1} \boxed{1}$) $h[k]$ 의 값이 적힌 테이프를 $s[k]$ 의 값이 적힌 테이프 아래에 두고 오른쪽으로 한 칸씩 미끄러뜨리면서 그때마다 겹치는 값들을 곱해서 모두 더해 새로운 테이프에 차례로 적어 넣는 동작과 동일하다.

계산표를 작성하든지 테이프를 이용하든지 어느 경우이든 간에 컨벌루션되는 두 신호의 겹침이 시작되고 끝나는 n 값을 미리 알면 편한데, 이것은 컨벌루션의 길이와 끝에 대한 성질을 이용하면 된다. ■

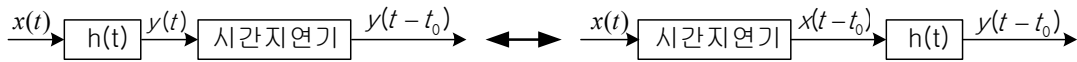
4.4.2 컨벌루션 연산의 성질

이동 성질

컨벌루션 $y(t) = x(t) * h(t)$ 는 다음과 같은 이동 성질을 만족한다.

$$y(t-t_0) = x(t-t_0) * h(t) \quad (C4.14)$$

이동 성질은 입력 $x(t)$ 을 시스템에 인가하여 얻은 출력을 t_0 만큼 시간 이동(지연)시킨 신호와 t_0 만큼 시간 이동(지연)된 입력 $x(t-t_0)$ 을 인가하여 얻은 출력이 같다는 시스템의 시불변성을 나타낸다. 물리적으로는 [그림 C4-9]와 같이 시간 이동(지연) 시스템과 임펄스 응답이 $h(t)$ 인 시스템의 연결 순서를 바꾸어도 상관없다는 의미를 갖는다.



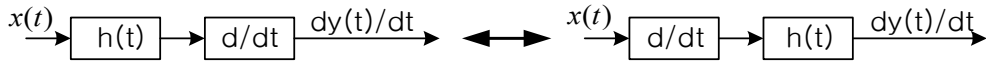
[그림 C4-9] 컨벌루션의 이동 성질의 물리적 의미

미분 성질

신호의 일차 도함수가 존재할 때, 컨벌루션은 미분과 관련하여 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$\frac{d}{dt}(x(t) * h(t)) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) \quad (C4.15)$$

미분 성질의 물리적 의미는 [그림 C4-10]에 나타난 것처럼 LTI 시스템에 입력을 인가하여 얻은 출력을 미분하는 것은 먼저 입력 신호를 미분한 뒤 시스템에 인가하여 출력을 얻는 것과 동일하다는 것을 의미한다.



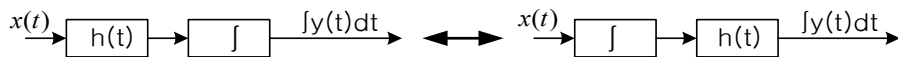
[그림 C4-10] 컨벌루션의 미분 성질의 물리적 의미

적분 성질

컨벌루션은 적분과 관련하여 다음의 관계를 만족한다.

$$\int_{-\infty}^t [x(\lambda) * h(\lambda)] d\lambda = \left[\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \right] * h(t) \quad (C4.16)$$

적분 성질은 컨벌루션의 정의로부터 쉽게 증명할 수 있으며, 미분 성질의 경우와 마찬가지로 물리적으로는 LTI시스템에 입력을 인가하여 얻은 출력을 적분하는 것과 먼저 입력 신호를 적분한 뒤 시스템에 인가하여 출력을 얻는 것이 같다는 것을 의미한다. 이는 [그림 C4-11]에 잘 나타나 있다.



[그림 C4-11] 컨벌루션의 적분 성질의 물리적 의미

면적 성질

두 신호를 컨벌루션한 신호 $y(t) = x(t) * h(t)$ 의 면적은 컨벌루션하는 각 신호의 면적의 곱과 같다. 이는 다음과 같이 간단히 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau) d\tau \right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) dt \right) d\tau \\
 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) dt \right) \\
 &= (x(t) \text{의 면적}) \times (h(t) \text{의 면적})
 \end{aligned} \tag{C4.17}$$

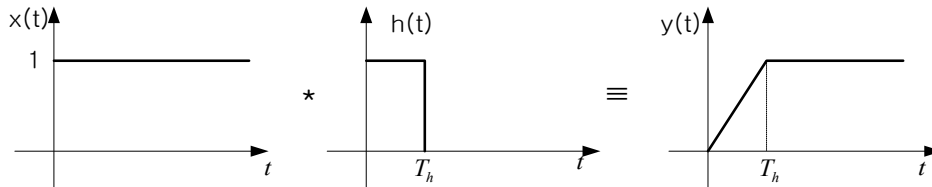
면적 성질은 컨벌루션한 결과가 바른지 간단히 검사하는 데 활용할 수 있다.

4.5 임펄스 응답과 시스템의 특성

4.5.2 임펄스 응답과 시스템의 주요 특성

시정수

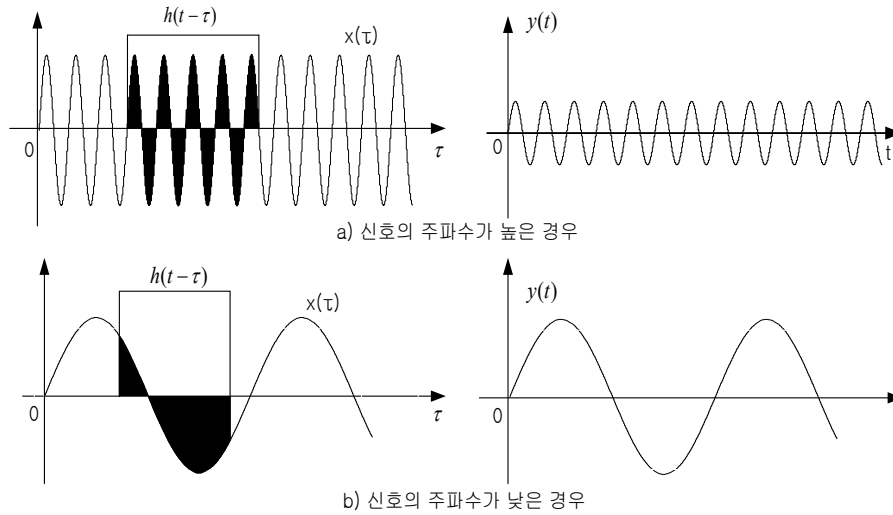
(책)식 (4.38)에 나타난 시정수 정의의 유용성을 다른 관점에서 살펴보자. 시스템의 계단 응답은 (단위) 계단 신호를 입력으로 인가할 때의 출력으로서 임펄스 응답 $h(t)$ 와 $u(t)$ 의 컨벌루션으로 주어진다. (책)식 (4.38)의 시정수의 정의는 임펄스 응답 $h(t)$ 를 폭이 T_h 인 사각 펄스로 대치한 것이므로, 이를 이용하여 계단 응답을 구하기 위한 컨벌루션을 수행하면 [그림 C4-12]처럼 될 것이다. 그림에서 보면 출력이 0으로부터 순간적으로 최종값(정상상태 출력)에 도달하지는 못하고 T_h 가 지난 뒤에야 비로소 도달하게 된다. 즉 시스템은 입력에 순간적으로 응답하지 못하며 시스템이 완전히 응답하기 위해서는 시간 T_h 를 필요로 함을 알 수 있다. 따라서 T_h 는 이 시스템의 시정수이다. 또한 T_h 는 단위 계단 입력에 대해 시스템 응답의 값이 직선적으로 증가하여 도달되는 데 걸리는 시간이므로 시스템의 상승 시간^{rise time}의 의미를 갖게 된다.



[그림 C4-12] 시스템의 시정수와 상승 시간

시정수는 시스템의 필터링 성질과도 직접적인 관련이 있다. 시스템에 높은 주파수의 정현파를 입력으로 인가한 경우를 생각해 보자. 이 신호는 시간에 따라 급속히 변하는 신호이다. 사각 펄스로 근사화한 임펄스 응답과 정현파 입력을 컨벌루션하여 시스템의 응답을 구하면 [그림 C4-13(a)]와 같이 된다. 입력 $x(t)$ 와 등가 임펄스 응답 $h(t)$ 의 컨벌루션은 두 신호의 곱 $x(\tau)h(t-\tau)$ 의 면적([그림 C4-13(a)]의 그늘진 부분)이 되는데, 그림에서 보듯이 높은 주파수의 정현파에 대해서는 신호의 주기가 시스템의 시정수보다도 훨씬 작기 때문에 양과 음의 면적이 거의 서로 상쇄되어 그 값이 매우 작다. 따라서 출력 $y(t)$ 는 주기적이기는 하지만 입력 신호에 비해 작은 진폭을 갖는다.

이와 반대로 [그림 C4-13(b)]에 나타난 것처럼 낮은 주파수의 정현파를 입력으로 인가하면 정현파의 주기가 시정수 T_h 보다 크므로 두 신호의 곱 $x(\tau)h(t-\tau)$ 의 면적([그림 C4-13(b)]의 그늘진 부분)의 상쇄 정도는 작다. 따라서 시스템의 출력 $y(t)$ 는 그림에서 볼 수 있듯이 [그림 C4-13(a)]의 경우에 비해 훨씬 더 크다.



[그림 C4-13] 시스템의 시정수와 필터링 효과

이상의 결과로부터 큰 시정수를 갖는 시스템은 고주파 신호를 억제하는 저역 통과 필터처럼 동작한다는 사실을 알 수 있다. 그림으로부터 유추해 보면, 입력 정현파의 주기가 시정수 T_h 와 같아지는 점을 경계로 시스템의 동작이 입력 신호에 대한 억제 동작으로 옮겨가는 것을 알 수 있다. 이와 같은 천이가 발생하는 주파수를 시스템의 차단 주파수라고 하는데, 차단 주파수 f_c 는 다음과 같이 된다.

$$f_c = \frac{1}{T_h} \quad (C4.18)$$

물론 차단 주파수를 전후한 시스템의 동작 변화는 점진적으로 일어나므로 극적인 변화는 없지만 이를 전후하여 시스템은 이 주파수보다 낮은 정현파 성분은 통과시키고, 높은 주파수 성분은 감쇠시키는 동작을 하는 것으로 취급하게 된다. 그러므로 이 차단 주파수를 시스템의 대역폭이라고도 한다.

점근적 안정도

점근적 안정도는 외부의 입력이 관여하지 않을 때 시간이 지남에 따라 시스템이 특정한 (초기) 상태에서 평형 상태, 즉 정상상태로 가는 성질이다. 입력이 인가되지 않는 경우 시스템의 응답은 영입력 응답뿐인데, 이것은 시스템 모드 항들로 이루어져 있다. 이산 시스템의 경우를 예로 들면, 시스템 모드 항들은 지수 함수 형태로 다음과 같이 특성근의 값에 의해 시간이 지남에 따라 감소하거나 증가하는 양상을 보인다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma_i^n| = \begin{cases} 0, & |\gamma_i| < 1 \\ \infty, & |\gamma_i| > 1 \end{cases} \quad (C4.19)$$

따라서 시스템이 점근적 안정이기 위한, 다시 말해 $n \rightarrow \infty$ 로 접근함에 따라 시스템이 정상

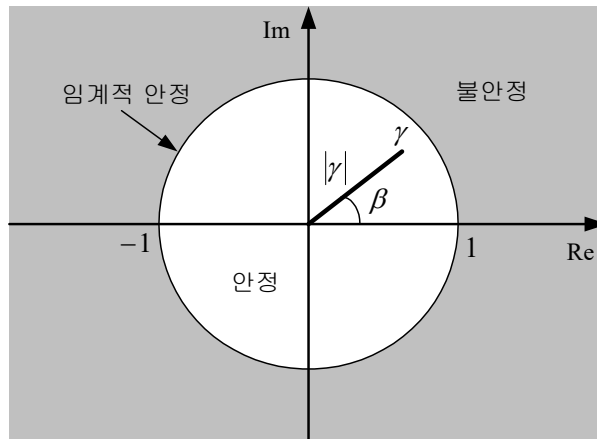
태로 가기 위한 조건은 시스템 모드가 지수 감소적일 것, 즉 $|\gamma_i| < 1$ 이어야 한다. 반면에 $|\gamma_i| > 1$ 의 경우는 $n \rightarrow \infty$ 로 접근함에 따라 시스템 응답은 계속 증가하게 되어 불안정해진다.

이 결과는 BIBO 안정도에서 얻은 결론과도 부합한다. 임펄스 응답 역시 시스템 모드 항들로 이루어지므로, (책)식 (4.30)의 BIBO 안정을 위한 절대 총합 가능 조건을 만족시키려면 시스템 모드가 지수 감소적일 것, 즉 $|\gamma_i| < 1$ 이어야 한다. 그러므로 시스템이 점근적으로든 BIBO 관점으로든 안정할 조건은 특성 방정식의 특성근이 $|\gamma_i| < 1$ 을 만족해야 한다. 이를 복소평면에 그림으로 나타내면 [그림 C4-14]와 같이 된다. 즉 복소평면 상의 단위원 내부에 특성근이 존재하면 안정, 외부에 존재하면 불안정이 된다.

단위원상에 특성근이 존재하게 되면, 즉 $|\gamma_i| = 1$ 이면, 임펄스 응답을 이루는 시스템 모드가 정현적으로 진동하게 되어 평형 상태가 존재하지 않을뿐더러 (책)식 (4.30)의 BIBO 안정 조건을 만족시키지도 못한다. 그러므로 일반적으로는 불안정한 경우로 분류되는데, 특별히 이 경우를 안정과 불안정의 경계로 보아 별도로 임계^{marginally} 안정이라고도 한다.

그러나 다중근인 특성근이 단위원상에 존재하면 시스템은 무조건 불안정하다. 왜냐하면, 이 경우 시스템 모드에 $n^{m-1}\gamma^n$ 의 꼴이 포함되어 $n \rightarrow \infty$ 로 됨에 따라 $|n^{m-1}\gamma^n| = n^{m-1} \rightarrow \infty$ 가 되어 발산하기 때문이다.

이러한 결과는 5장과 6장에서 다시 보게 될 것이다.



[그림 C4-14] 특성근의 위치와 시스템 안정도