

이산 시간 푸리에 변환

책의 '1절 이산 시간 푸리에 변환의 개요'와 관련하여 포락선 함수 도입의 필요성을 보완 설명하였다.

책의 '3절 이산 시간 푸리에 변환의 성질'과 관련하여 창 씌우기 정리에 대한 상세한 설명을 보충하였다.

책의 '4절 DTFT에 의한 이산 시스템 해석'과 관련된 간단한 예제들을 추가하였다.

책의 '5절 푸리에 표현의 상호 관계'의 내용들이 잘 이해될 수 있도록 네 가지 푸리에 표현에 대한 간단한 요약과 상호 연관성에 대한 부연 설명을 간략히 제시하였다.

책의 '6절 이산 푸리에 변환(DFT)'과 관련하여 기본 개념을 보충 설명하고, 행렬 표현 접근을 통해 DFT가 일종의 직교 변환임을 보였다. 또한 실제 응용에서 DFT에 의해 스펙트럼의 누설이 발생하는 데 대한 설명과 예를 추가하였다. 그리고 원형 컨벌루션과 선형 컨벌루션이 어떤 관계인지를 보충 설명하였다.

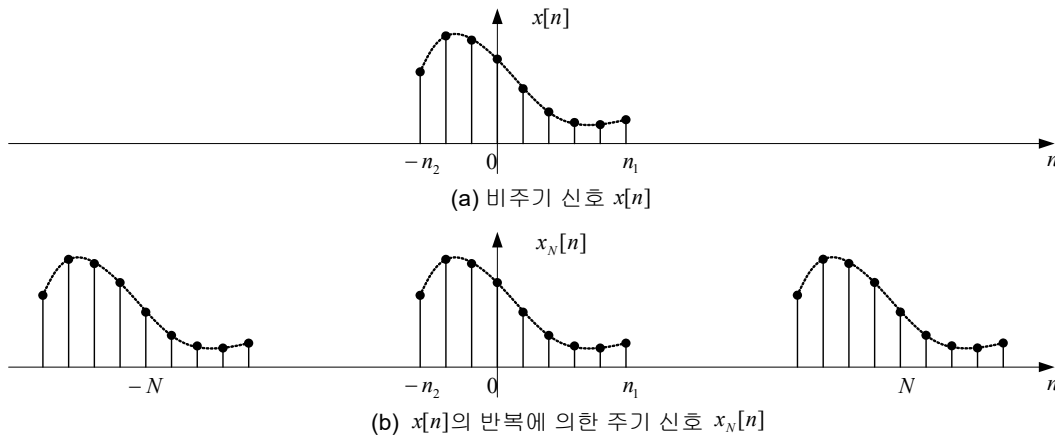
12.1 이산 시간 푸리에 변환의 개요

12.1.1 이산 시간 푸리에 변환

연속계에 대한 푸리에 변환을 유도할 때, 한 주기 동안 비주기 신호 $x(t)$ 와 일치하는 주기 신호 $x_T(t)$ 를 만들어서 이를 이용하여 $x(t)$ 를 표현한 뒤, 주기를 무한대로 접근시키면 $x(t)$ 와 $x_T(t)$ 가 점점 일치하게 되어 $x_T(t)$ 에 대한 푸리에 급수가 $x(t)$ 에 대한 푸리에 표현 역할을 하게 됨을 이용하였다.

마찬가지로 이산 비주기 신호 $x[n]$ 을 [그림 C12-1]과 같이 주기 N 으로 반복하여 N -주기 신호 $x_N[n]$ 을 만들면 그것을 이산 푸리에 급수로 표현할 수 있고, 이때 주기 N 을 무한대로 접근시키면 주기 신호와 비주기 신호는 점점 같아지게 될 것이다. 따라서, 주기 신호의 이산 시간 푸리에 급수에 $N \rightarrow \infty$ 의 극한을 취하면 비주기 신호 $x[n]$ 을 주파수 영역에서 표현한 것이 될 것이다.

이런 원리에 입각하여 책에서 설명한 것과 같이 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)를 유도해낼 때, (책)식 (12.2)에 $N \rightarrow \infty$ 의 극한을 취하면, Ω_0 가 매우 작아져서 모든 주파수 성분이 점점 가까이 모여들어 궁극적으로는 이산 스펙트럼이 연속적인 스펙트럼으로 변하게 되겠지만, 푸리에 계수 X_k 의 크기가 $1/N$ 의 곱셈 때문에 점점 작아져 0으로 되어버리는 문제가 생긴다. 따라서 이를 피하기 위해 $N \rightarrow \infty$ 의 극한을 취하기 전에 먼저 스펙트럼이 연속적으로 되는 성질을 반영한 NX_k 의 포락선 함수 $X(\Omega)$ 를 정의한 것이다.



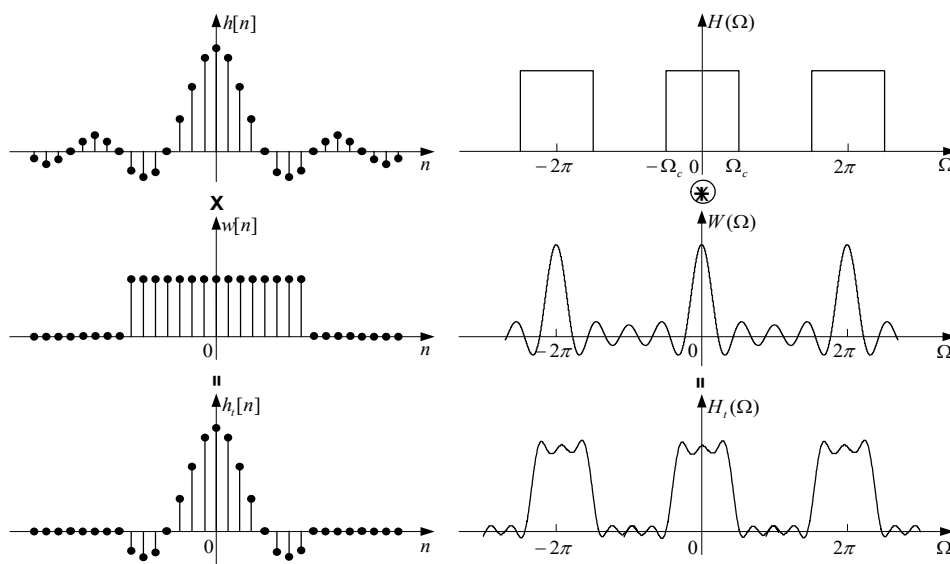
[그림 C12-1] 신호 $x[n]$ 의 주기적 확장에 의한 주기 신호 $x_N[n]$

12.3 이산 시간 푸리에 변환의 성질

12.3.2 DTFT의 컨벌루션 성질

주파수 컨벌루션(창 씌우기 정리)

창 씌우기는 필터 설계에서 중요한 역할을 하므로 좀 더 상세히 알아보자. (책)[그림 12-17]의 $H(\Omega)$ 는 이상적인 저역 통과 필터의 주파수 응답이고 이를 IDTFT한 신호 $h[n]$ 은 필터의 임펄스 응답으로서 (책)[예제 12-4]에서 구한 것처럼 sinc 함수이다.



(책)[그림 12-17] 창 씌우기가 스펙트럼에 미치는 효과(주파수 컨벌루션)

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (\text{C12.1})$$

$$h[n] = \frac{1}{\pi n} \sin(\Omega_c n) = 2F_c \text{sinc}(2F_c n) \quad (\text{C12.2})$$

그런데 $h[n]$ 은 무한개의 샘플로 이루어져 있을 뿐만 아니라 비인과적이므로 물리적으로 만들 수 있는 필터가 아니다. 따라서 현실적인 대안은 $h[n]$ 을 손실이 크지 않는 범위에서 적당히 잘라내고, 이를 시간 이동시켜 인과 신호로 만드는 것이다. 이때 임펄스 응답을 잘라내는 작업이 (책)[그림 12-17]에 보인 것처럼 다음과 같은 창 함수를 곱하는 동작이다.

$$w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq L \\ 0, & |n| > L \end{cases} \quad (\text{C12.3})$$

잘려진 임펄스 응답 $h_t[n] = h[n]w[n]$ 에 주파수 컨벌루션 성질을 적용하면

$$H_t(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(\theta) W(\Omega - \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} W(\Omega - \theta) d\theta \quad (\text{C12.4})$$

이다. 즉, $H_t(\Omega)$ 는 $|\theta| \leq \Omega_c$ 에서 $W(\Omega - \theta)$ 의 면적이다.

(책)식 (12.20)과 (책)[예제 12-2]의 (책)[그림 12-3]에서 볼 수 있듯이 창 함수 $w[n]$ 의 DTFT $W(\Omega)$ 는 sinc 함수와 비슷한 모양으로 대부분의 에너지가 몰려 있는 주엽^{main lobe}과 상대적으로 작은 진동^{ripple}들이 모인 부엽^{side lobe}으로 이루어져 있다.

$W(\theta)$ 를 뒤집어($W(-\theta)$) 오른쪽으로 이동시키면, 부엽의 작은 진동 중에서 주엽에 가까이 있는 크기가 큰 것들이 적분 구간 경계 Ω_c 를 통과하여 빠져나가고, 대신에 주엽에서 멀리 있는 상대적으로 크기가 작은 것들이 경계 $-\Omega_c$ 를 거쳐 적분 구간에 추가되어 들어온다. 이동 거리 Ω 가 커짐에 따라 빠져나가는 작은 진동들의 크기는 점점 커지고 들어오는 것들의 크기는 점점 작아진다. 따라서 적분되는 면적, 즉 $H_t(\Omega)$ 의 값의 변화는 주로 빠져나가는 것들에 의해 영향을 받게 된다.

양의 진동 부분이 경계를 빠져나가면 면적이 감소하고, 음의 진동들이 빠져나가면 면적은 증가하여 $H_t(\Omega)$ 에도 유사한 진동이 만들어지게 된다. Ω 가 Ω_c 에 가까워지면 주엽이 경계를 이탈하기 시작하여 면적이 급격하게 줄어들게 된다. 주엽이 적분 구간을 다 빠져나가더라도 부엽의 작은 진동들이 남아 있어서 $H_t(\Omega)$ 에는 값은 매우 작으나 추가적인 진동이 생긴다. 따라서 $H_t(\Omega)$ 는 (책)[그림 12-17]의 오른쪽 열 마지막에 보인 형태와 같이 된다.

지금까지 살펴본 것처럼, 필터의 물리적 구현을 위해 어쩔 수 없이 이상적인 저역 통과 필터의 임펄스 응답을 잘라내면, 그 대가로 주파수 영역에서 통과 대역과 저지 대역에 작은 진동이 발생하고 천이 대역의 폭이 넓어진다.

12.4 DTFT에 의한 이산 시스템 해석

■ 예제 C12-1 : IIR 시스템의 주파수 응답

다음과 같이 무한 임펄스 응답을 갖는 시스템의 주파수 응답을 구하라.

$$h[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1] + 0.25\delta[n-2] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^k \delta[n-k]$$

<풀이>

$h[n]$ 은 실수 지수 신호 $(0.5)^n u[n]$ 과 같다. 이를 직접 DTFT하면 다음과 같이 주파수 응답이 구해진다.

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

또한, 이와 다른 방법으로 주파수 응답을 구할 수도 있다. 다음 관계를 이용하면

$$h[n-1] = \delta[n-1] + 0.5\delta[n-2] + 0.25\delta[n-3] + \dots$$

임펄스 응답을 다음과 같이 차분 방정식 형태로 변환할 수 있다.

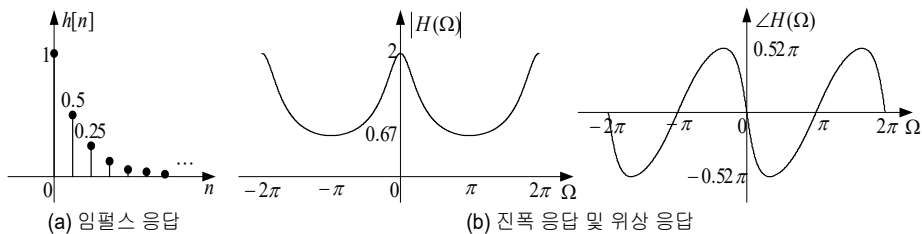
$$h[n] = 0.5h[n-1] + \delta[n]$$

이를 DTFT하게 되면

$$H(\Omega) = 0.5e^{-j\Omega} H(\Omega) + 1$$

가 된다. 이를 정리하면 $h[n]$ 을 직접 DTFT한 것과 같은 결과를 얻는다.

이 시스템의 임펄스 응답과 주파수 응답을 [그림 C12-2]에 보였다. 임펄스 응답이 실수 신호이므로 그림에서 보듯이 진폭 응답은 우대칭, 위상 응답은 기대칭을 만족하며, 이러한 대칭성이 $\Omega = \pi$ 의 대칭축에 대해서도 성립한다. ■



[그림 C12-2] [예제 C12-1]의 IIR 시스템의 임펄스 응답과 주파수 응답

■ 예제 C12-2 : DTFT를 이용한 임펄스 응답 구하기

다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

<풀이>

시간 이동 성질을 이용하여 DTFT를 구하면 다음과 같이 주파수 응답을 얻는다.

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}$$

부분분수로 전개하면

$$H(\Omega) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

이고, 이를 IDTFT하여 다음의 임펄스 응답을 얻는다.

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

■

12.5 푸리에 표현의 상호 관계

푸리에 해석 기법은 실제로 발생하게 되는 다양한 신호들에 대해 주파수 영역에서 분석하고 필요한 정보를 끌어낼 수 있게 해준다. 하지만 신호의 형태에 따라 완전히 서로 다른 푸리에 표현이 존재한다고 받아들여서 푸리에 표현이 너무 많아 혼란스러울 뿐만 아니라 어렵고 힘들기까지 하다고 느낄 수도 있다. 이것은 어느 정도 사실일 수도 있지만, 실제로는 생각하는 것만큼 그런 것은 아니다.

7장, 8장, 11장, 그리고 12장에서 지금까지 살펴본 네 가지의 푸리에 표현 FS, FT, DTFS, DTFT는 각각의 정의들이 외형적으로 다르고 용어에 드러나 있지 않은 미묘한 차이를 이해하는 것이 중요하기는 하지만, 푸리에 표현의 기본 구조는 모두 똑같다. 신호는 주파수와 일대일 대응 관계에 있는(복소) 정현파 신호의 가중합으로 표현된다. 즉, 신호는 주파수 변수를 가진 복소 정현파 신호에 의하여 곱해진 다음, 시간 변수가 이산인지 연속인지에 따라 더해지거나 적분된다. 그러므로 서로 다른 푸리에 표현들의 기본적인 성질은 매우 비슷할 수밖에 없다. 예를 들면, 시간 영역의 컨벌루션은 항상 주파수 영역에서 곱셈을 의미하고, 시간 영역에서 시간 지연은 항상 주파수 영역에서 위상 스펙트럼의 변화를 만들게 된다.

12.5.1 푸리에 표현 사이의 관계와 특성

푸리에 표현의 특성

(1) 연속 시간 푸리에 급수(FS)

FS는 연속 주기 신호에 적용된다. 기본 주파수의 정수배인 무한개의 연속 복소 정현파 신호들의 가중합으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 이산 비주기 함수가 된다.

(2) 연속 시간 푸리에 변환(FT)

FT는 연속 비주기 신호에 적용된다. 주파수가 $-\infty$ 에서 ∞ 까지 연속적으로 변하는 연속 복소 정현파 신호들의 가중 적분으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 연속 비주기 함수가 된다.

(3) 이산 시간 푸리에 급수(DTFS)

DTFS는 이산 주기 신호(주기 N)에 적용된다. 기본 주파수의 정수배인 N 개의 이산 복소 정현파 신호들의 가중 합으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 이산 주기 함수(주기 N)이다.

(4) 이산 시간 푸리에 변환(DTFT)

DTFT는 이산 비주기 신호에 적용된다. 주파수가 2π 범위(한 주기 구간)내에서 연속적으로 변하는 이산 복소 정현파 함수들의 가중적분으로 신호를 표현한다. 신호의 스펙트럼은 주파수에 대해 연속 주기 함수(주기 2π)이다.

푸리에 표현들의 관계

(1) FS와 FT

FT를 소개하면서, 비주기 신호 $x(t)$ 는 주기 신호 $x_T(t)$ 의 주기 T 가 무한대인 경우로, 또는 주기 신호 $x_T(t)$ 는 비주기 신호 $x(t)$ 를 주기 T 로 반복시킨 것으로 취급하여 논의를 전개하였다. 전자의 접근은 주기 신호의 이산 스펙트럼으로부터 비주기 신호의 스펙트럼이 연속 함수가 된다는 것을, 후자의 접근은 비주기 신호의 연속 스펙트럼의 샘플링 효과에 의해 주기 신호의 스펙트럼이 이산 함수가 된다는 결과를 끌어낼 수 있게 하였다.

결론적으로, 주기 신호의 스펙트럼 X_k 는 비주기 신호의 푸리에 변환 $X(\omega)$ 을 기본 주파수의 간격으로 샘플링하여 그 크기를 주기로 나눈 것과 같다.

$$X_k = \frac{1}{T} X(k\omega_0) \quad (\text{C12.5})$$

(2) DTFS와 DTFT

비주기 신호 $x[n]$ 에 대한 DTFT를 유도하면서 주기 신호 $x_N[n]$ 의 DTFS의 주기를 무한대로 접근시키는 형태로 확장하여 결과를 얻었다. 이를 다시 쓰면,

$$X_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) \quad (\text{C12.6})$$

$X(\Omega)$ 의 샘플값을 취하여 크기를 주기로 나눈 것과 같다. 이는 바로 앞에서 살펴본 FS와 FT의 관계와 동일하다. 이로부터 연속 시간이든 이산 시간이든 상관없이 **주기 신호는 이산 스펙트럼을 가지고 비주기 신호는 연속 스펙트럼을 가지며, 주기 신호의 스펙트럼은 비주기 신호의 스펙트럼의 샘플 값에 대응된다**는 결론을 얻을 수 있다.

(3) FS와 DTFS, FT와 DTFT

이산 신호는 연속 신호를 샘플링한 것으로 생각할 수 있다. 이미 9장에서 연속 신호를 샘플링하여 이산 신호로 만들면 이 신호의 스펙트럼은 샘플링 주파수 간격마다 연속 신호의 스펙트럼을 반복하게 된다는 사실을 알았다. 따라서 주기 신호이든 비주기 신호이든 상관없이 **연속 신호의 스펙트럼은 비주기적이고 이산 신호의 스펙트럼은 주기 함수가 된다.**

12.6 이산 푸리에 변환(DFT)

12.6.1 이산 푸리에 변환의 개요

z 변환과 DFT의 관계

연속 신호와 시스템에 대한 라플라스 변환에 상응하는 이산 신호와 시스템의 주파수 영역 변환이 바로 다음 12장에서 다룰 z 변환인데, 라플라스 변환과 마찬가지로 z 변환도 푸리에 표현과 밀접한 관계가 있다. DFT는 DTFT를 샘플링한 것이고, DTFT는 z 평면의 단위 원 위에서 계산된 z 변환의 값에 해당하므로 DFT와 z 변환의 관계는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} \right)^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \end{aligned} \quad (C12.7)$$

즉 DFT는 z 평면상의 단위원 위에 등간격으로 위치한 N 개의 점에서 z 변환의 값을 구한 것과 같다.

DFT의 행렬 표현

(책)식 (12.65)의 DFT를 $k=0, 1, \dots, N-1$ 에 대해 풀어 쓰면 DFT는 결국 N 개의 미지수 $X[0], X[1], \dots, X[N-1]$ 에 대해 N 개의 연립방정식을 푸는 문제와 같게 된다.

DFT를 행렬 형태로 정리하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad (C12.8a)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{W} \mathbf{x} \quad (C12.8b)$$

식 (C12.8)에서 회전 인자로 이루어진 계수 행렬 \mathbf{W} 를 DFT 행렬이라고 한다. 회전 인자 $W_N^{kn} = W_N^{n^*k}$ 이므로 DFT 행렬 \mathbf{W} 는 대칭 행렬이다. 즉 $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}$ 이다.

한편 (책)식 (12.66)의 IDFT를 행렬 형태로 나타내면, $W_N^{-kn} = (W_N^{nk})^*$ 이므로 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} \quad (\text{C12.9a})$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \mathbf{X} \quad (\text{C12.9b})$$

그런데, 식(C12.9b)를 \mathbf{x} 에 대해서 풀면 $\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X}$ 가 되므로 다음이 성립한다.

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \quad (\text{C12.10})$$

\mathbf{W} 가 대칭 행렬이므로, 식 (C12.10)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{W}^{*T} \mathbf{W} = N \mathbf{I} \quad (\text{C12.11})$$

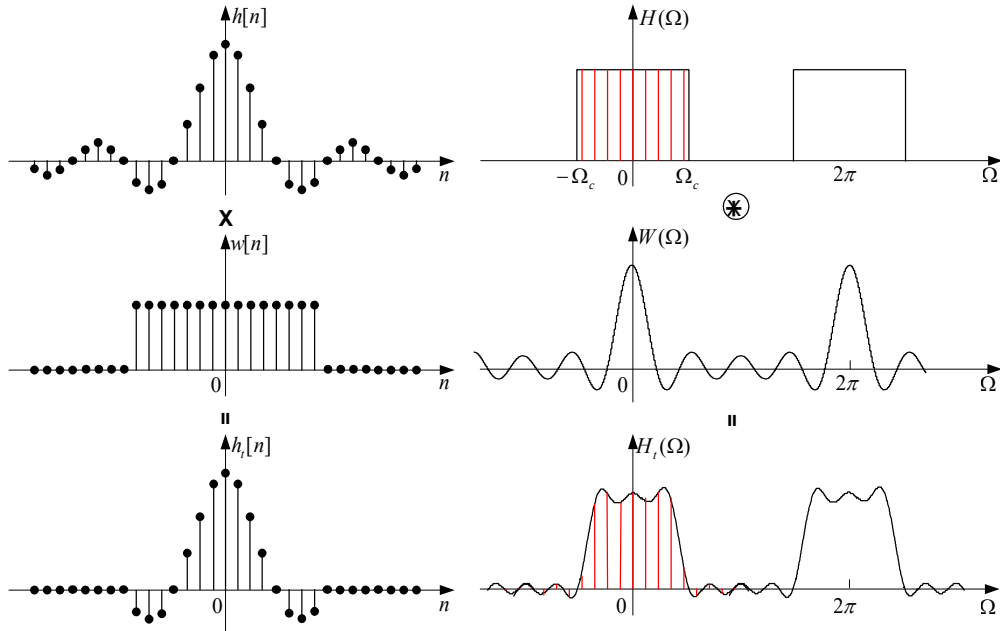
일반적으로 행렬 \mathbf{A} 가 $\mathbf{A}^{*T} \mathbf{A} = \mathbf{I}$ 를 만족하면 유니터리 행렬 ^{unitary matrix}이라 한다. 유니터리 행렬은 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ 를 만족하는 실수 직교행렬 ^{orthogonal matrix}을 복소 행렬에 확장시킨 개념이다. 식 (C12.11)에서 보면 행렬 \mathbf{W} 가 엄밀히 말해 유니터리 행렬이 아니지만 IDFT의 계수 행렬에 곱해진 $1/N$ 을 쪼개어 DFT와 IDFT 양쪽의 계수 행렬에 $1/\sqrt{N}$ 을 똑같이 곱하여 이를 계수 행렬로 사용하면 식 (C12.8b)와 식 (C12.9b)는 각각 $\mathbf{X} = \mathbf{W} \mathbf{x}$ 와 $\mathbf{x} = \mathbf{W}^* \mathbf{X}$ 가 되므로 \mathbf{W} 는 유니터리 행렬이 된다. 따라서 **DFT는 유니터리 변환, 즉 직교 변환이다**. 직교 변환의 유용성에 대해서는 7장에서 이미 상세히 설명한 바 있다.

12.6.2 DFT의 해상도와 영 채우기

유한 구간 데이터와 DFT의 누설

DTFT는 주파수 영역으로 푸리에 변환해야 할 대상 신호가 통상적으로 무한한 시간 구간에 걸쳐 존재하는 것으로 가정하지만, 실제 응용에서는 이산 신호 데이터의 수가 유한한 경우가 거의 대부분이다. 이는 결국 무한한 길이의 이산 신호 $x[n]$ 에 유한한 길이를 갖는 (사각)창을 씌워 절단한 것으로 생각할 수 있는데, 우리는 이미 12.3절에서 DTFT의 주파수 컨벌루션 성질(창 씌우기 성질)을 통해 신호의 스펙트럼에 어떤 일이 일어나는지 살펴본 바 있다. 그 결과를 다시 돌이켜 보면, 시간 영역에서 신호 $x[n]$ 에 창 $w[n]$ 을 씌우면 주파수 영역에서 두 스펙트럼의 (원형) 컨벌루션이 되어 (책)[그림 12-17]과 같이 된다.

$$x[n]w[n] \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\Omega) \circledast W(\Omega) \quad (\text{책})(12.51)$$



[그림 C12-3] 창 씌우기(주파수 컨벌루션)에 의한 DFT의 누설 효과

이를 다시 나타낸 [그림 C12-3]에서 보면 원래는 오른쪽 맨 위와 같이 사각 펄스로 나타나야 할 신호의 스펙트럼이 오른쪽 제일 밑과 같이 진 주파수에 걸쳐 맥동이 존재하는 스펙트럼으로 나타나게 된다.

DFT는 DTFT를 샘플링한 것이므로, 유한한 길이의 신호 데이터를 이용하여 DFT하게 되면 [그림 C12-3]의 오른쪽 제일 밑의 스펙트럼을 샘플링한 결과가 얻어져서 이상적으로 길이가 무한한 신호의 스펙트럼과는 차이가 난다. 특히 0이 되어야 할 주파수에 대해서도 값을 가지게 됨을 볼 수 있다. 이처럼 창 함수 스펙트럼의 부엽에 의해 신호의 특정한 주파수 성분이 새어나가 주변의 주파수들로 번지는 현상을 **누설** (leakage)이라고 하며, 이론적으로는 무한하나 실제로는 유한한 개수의 데이터로 DFT할 때 관찰할 수 있는 현상이다.

■ 예제 C12-3 : 유한 구간 정현파의 DFT의 누설 효과

다음과 같이 길이 $N = 2L + 1$ 인 유한 구간 이산 정현파의 DFT를 구하여 그려라.

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n) \text{rect}[(n - N)/2L] = \begin{cases} \cos(\Omega_0 n), & n = 0, 1, \dots, 2L, \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}, \quad 0 \leq \Omega_0 \leq \pi$$

<풀이>

무한 구간 이산 정현파 $x'[n] = \cos(\Omega_0 n)$ 의 DTFT는 다음의 스펙트럼이 2π 주기로 반복되는 주기 함수가 된다.

$$X'(\Omega) = \pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)], \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi$$

그리고 사각 펄스 $p_L[n] = \text{rect}[n/2L]$ 의 DTFT는 (책)[예제 12-2]에서 다음과 같이 구한 바 있으므로

$$P_L(\Omega) = \frac{\sin(\Omega(2L+1)/2)}{\sin(\Omega/2)} = \frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)}$$

주어진 유한 구간 정현파 $x[n]$ 의 DTFT는 주파수 컨벌루션 정리에 의해 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X'(\Omega) \otimes P_L(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X'(\theta) P_L(\Omega - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} [P_L(\Omega + \Omega_0) + P_L(\Omega - \Omega_0)] \end{aligned}$$

따라서 유한 구간 정현파 $x[n]$ 의 N 점 DFT는 다음과 같이 된다.

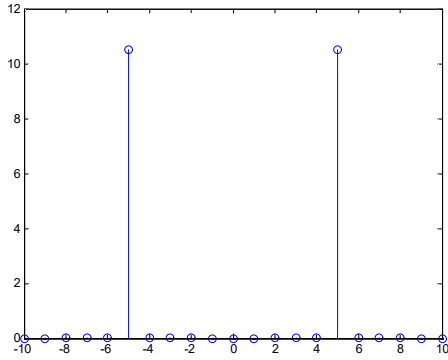
$$\begin{aligned} X[k] &= X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \frac{1}{2} \left[P_L\left(\frac{2\pi}{N}k + \Omega_0\right) + P_L\left(\frac{2\pi}{N}k - \Omega_0\right) \right], \quad -L < k \leq L \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}k + \Omega_0\right)N/2\right)}{\sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}k + \Omega_0\right)/2\right)} + \frac{\sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}k - \Omega_0\right)N/2\right)}{\sin\left(\left(\frac{2\pi}{N}k - \Omega_0\right)/2\right)} \right], \quad -L \leq k \leq L \end{aligned}$$

만약 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}l$ 이면, $X[k]$ 는 다음과 같이 되므로

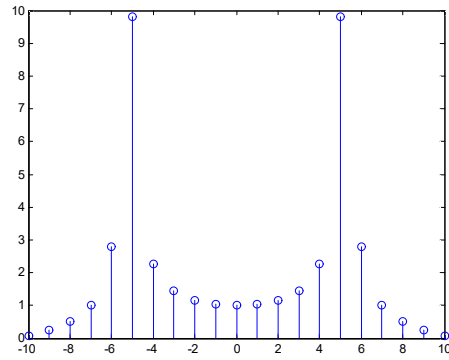
$$\begin{aligned} X[k] &= \frac{1}{2} [P_L\left(\frac{2\pi}{N}(k+l)\right) + P_L\left(\frac{2\pi}{N}(k-l)\right)] = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((k+l)\pi)}{\sin((k+l)\pi/N)} + \frac{\sin((k-l)\pi)}{\sin((k-l)\pi/N)} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{N}{2}, & k = \pm l \\ 0, & -L \leq k \leq L, \quad k \neq \pm l \end{cases} \end{aligned}$$

정확히 $\frac{2\pi}{N}k = \pm \frac{2\pi}{N}l = \pm \Omega_0$ 에서만 값을 갖는 스펙트럼을 얻을 수 있을 것이다. 하지만 $\Omega_0 \neq \frac{2\pi}{N}l$ 인 경우에는 $\left| \frac{2\pi}{N}k \pm \Omega_0 \right|$ 를 0에 가장 가깝게 만드는 k 값에서 최댓값을 가지며, 그 주위에 작지만 0이 아닌 값들을 갖는 스펙트럼이 얻어질 것이다. 즉 누설이 발생한다.

[그림 C12-4]는 길이 $N=21(L=10)$ 인 정현파의 DFT를 $\Omega_0 = \frac{10\pi}{21}$ 와 $\Omega_0 = \frac{10.5\pi}{21}$ 인 경우에 대해 각각 그린 것이다. 그림에서 볼 수 있듯이 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}l$ 을 만족하는 $\Omega_0 = \frac{10\pi}{21}$ 의 경우에는 $k=\pm 5$ 에서만 10.5의 값을 갖는 스펙트럼이 얻어지지만, 그렇지 못한 경우 다른 주파수에서의 값이 0이 아닌 스펙트럼이 얻어지고, $k=\pm 5$ 의 샘플 스펙트럼의 값은 9.8093이 되어 누설이 발생했음을 알 수 있다.



$$(a) \Omega_0 = \frac{10\pi}{21}$$



$$(b) \Omega_0 = \frac{10.5\pi}{21}$$

[그림 C12-4] 유한 구간 정현파의 DFT의 누설 효과

이 예제에서 한 가지 더 눈여겨봐 둘 점은 수식에서 볼 수 있듯이 DFT에 의해 얻어지는 스펙트럼의 값이 데이터의 길이(개수)에 종속적이라는 점이다. ■

DFT의 길이 N 의 선정

DFT를 이용하여 연속 신호를 처리할 때, 스펙트럼의 해상도와 정확도가 신호 $x[n]$ 과 DFT의 길이 N 과 밀접하게 관련되어 있으므로 N 의 선정은 중요한 문제이다.

지속 시간 t_s 인 연속 신호를 간격 T 로 샘플링할 때 주파수 중첩을 피하기 위해 지켜져야 할 조건은 샘플링 정리에 의해 다음과 같이 된다.

$$f_s = \frac{1}{T} \geq 2f_b \quad (C12.12)$$

여기서 f_s 는 샘플링 주파수, f_b 는 신호의 (유효) 대역폭이다. 샘플링된 이산 신호의 스펙트럼은 연속 신호의 스펙트럼이 f_s 를 주기로 하여 반복되고, DFT는 이 스펙트럼의 한 주기에 N 개의 샘플을 취하게 되므로 DFT에 의해 얻어진 샘플 스펙트럼의 샘플 간 간격(해상도)은 다음과 같다.

$$\Delta f = \frac{\text{한 주기 구간에 해당하는 주파수}}{\text{샘플 개수}} = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} \quad (\text{책})(12.71)$$

그런데 N 점 샘플 스펙트럼을 IDFT하여 복원된 이산 신호는 주기 N 인 주기 신호로서 한 주기 길이가 연속 신호의 지속 시간보다 길어야만 시간 영역에서 파형의 중첩(절단 왜곡)이 발생하지 않는다. 샘플의 개수가 N 이고 샘플링 간격이 T 이므로 연속 신호로 환산된 길이는 시간 NT 에 해당된다. 따라서 다음을 만족해야 한다.

$$NT \geq t_s \quad (C12.13)$$

식 (C12.12)와 (책)식 (12.71)을 동시에 만족시켜야 하므로 다음의 관계가 성립한다.

$$N \geq 2t_s f_b \quad (\text{C12.14})$$

12.6.3 원형 컨벌루션과 DFT

원형 컨벌루션과 선형 컨벌루션의 관계

원형 컨벌루션은 신호 데이터를 원 위에 펼쳐서 한 바퀴 돌 때마다 동일한 데이터 패턴이 꼬리를 물고 반복되도록 하여 계산하는 반면, 선형 컨벌루션은 N 개 이외의 샘플 값은 0으로 간주하여 데이터를 직선 위에 펼쳐놓고 계산을 진행하므로 [그림 C12-5]와 같이 시간의 경과에 따라 이동 신호가 지나가면 그 자리로 다시 나타나지 않고 사라진다.

				1	2	3	4	
-----				-----				-----
d	c	b		a				
	d	c		b	a			
		d		c	b	a		
			d	d	c	b	a	
					d	c	b	a
						d	c	b
							d	c
								d

[그림 C12-5] 선형 컨벌루션 예

그런데 (책)[그림 12-30]과 [그림 C12-5]를 비교해보면 흥미로운 사실을 알 수 있다. (책)[그림 12-30]의 원형 컨벌루션의 이동 신호의 1행은 [그림 C12-5]의 선형 컨벌루션의 이동 신호의 1행과 5행을 더한 것과 같고, 나머지 행들에 대해서도 같은 원리를 관찰할 수 있다. 다시 말해 **두 신호의 원형 컨벌루션은 두 신호의 선형 컨벌루션 결과를 길이 반으로 자른 다음 더한 것과 같다.** 선형 컨벌루션 $z[n] = x[n] * h[n]$ 은 길이 $2N-1$ 인 신호이므로, 원형 컨벌루션 $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ 은 다음과 같게 된다.

$$y[n] = [z[0] \ z[1] \ z[2] \ \cdots \ z[N-1]] + [z[N] \ z[N+1] \ \cdots \ z[2N-2] \ 0] \quad (\text{C12.15})$$