<5장 연습문제 정답>

연습문제 5.1

1. (a) $x \in [1, \infty)$ 일 때 $f'(x) = 9x^2 - \sin x > 0$ 이므로 $f(x)$는 $[1, \infty)$에서 증가한다.

   (b) $x \in (-\infty, \infty)$ 일 때 $g'(x) = 2 - \cos x > 0$ 이므로 $g(x)$는 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

   (c) $x \in [0, \infty)$ 일 때 $h'(x) = \dfrac{1}{4} - e^x < 0$ 이므로 $h(x)$는 $[0, \infty)$에서 감소한다.

   (d) $x \in (-\infty, -1]$ 에서 $k'(x) = -\sin x + 2x < 0$ 이므로 $k(x)$는 $(-\infty, -1]$에서 감소한다.

3. (a) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ 에서 증가한다.

   (b) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ 에서 감소한다.

   (c) $(-\infty, 2)$ 에서 증가하고 $(2, \infty)$ 에서 감소한다.

   (d) $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$ 에서 감소한다.

   (e) $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

   (f) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$에서 증가한다.

   (g) $(0, \infty)$ 에서 증가한다.

   (h) $(-\infty, 0)$ 에서 증가하고 $(0, \infty)$ 에서 감소한다.

5. (a) 극댓값 2, 극솟값 -2

   (b) 극댓값 7, 극솟값 -1

   (c) 극댓값 없음, 극솟값 없음

   (d) 극댓값 $\dfrac{1}{2}$, 극솟값 $-\dfrac{1}{2}$

   (e) 극댓값 없음, 극솟값 $-\dfrac{27}{e^3}$

   (f) 극댓값 없음, 극솟값 없음

   (g) 극댓값 없음, 극솟값 $-\dfrac{1}{2e}$

   (h) 극댓값 없음, 극솟값 $\dfrac{1}{2} - \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

연습문제 5.2

1. (a) $x = -\frac{1}{2}$ (b) $x = \frac{4-\sqrt{13}}{3}$, $x = \frac{4+\sqrt{13}}{3}$ (c) $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$

3. (a) $f(x) = x^3 + 3x - 2$ 라 하면 $f(x)$ 는 $\mathbb{R}$ 에서 연속이다. $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = 2 > 0$ 이므로 중간값 정리에 의하여 $f(c) = 0$ 인 $c \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ 가 존재한다. $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근 a 와 b 를 갖는다고 가정하면, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ 이다. 롤의 정리에 의하여 $f'(d) = 0$ 인 $d \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ 가 존재해야 한다. 그런데 $f'(x) = 3x^2 + 3$ 이므로 임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이다. 따라서 $f'(d) = 0$ 인 $d \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ 가 존재하지 않는다. 그러므로 $f(x) = 0$ 은 단 하나의 실근을 갖는다.

   (b) $g(x) = 4x - 3 + \cos\frac{\pi}{2}x$ 라 하면 $g(x)$ 는 $\mathbb{R}$ 에서 연속이다. $g(0) = -2 < 0$, $g(1) = 1 > 0$ 이므로 중간값 정리에 의하여 $g(c) = 0$ 인 $c \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ 가 존재한다. $g(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근 a 와 b 를 갖는다고 가정하면, $g(a) = 0$, $g(b) = 0$ 이다. 롤의 정리에 의하여 $g'(d) = 0$ 인 $d \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ 가 존재해야 한다. 그런데 $g'(x) = 4 - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$ 이므로 임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $g'(x) > 0$ 이다. 따라서 $g'(d) = 0$ 인 $d \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ 가 존재하지 않는다. 그러므로 $g(x) = 0$ 은 단 하나의 실근을 갖는다.

5. 만일 $a = b$이면 $|\cos a - \cos b| \le |a - b|$는 자명하게 성립한다.

이제 $a < b$라 하자. $f(x) = \cos x$라 하면 $f(x)$는 $\mathbb{R}$에서 연속이므로, $f(x)$는 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하다. 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

인 $c \in (a,\ b)$가 존재한다. 이때 $f'(x) = -\sin x$이므로 $f'(c) = -\sin c$이다. 따라서

$$\frac{\cos a - \cos b}{a-b} = -\sin c$$

이고, 양변에 절댓값을 취하면

$$\left| \frac{\cos a - \cos b}{a-b} \right| = |-\sin c|$$

이다. $|-\sin c| \le 1$이므로

$$|\cos a - \cos b| = |-\sin c|\,|a-b| \le |a-b|$$

이다.

7. $f(x)$는 구간 $[0,\ 4]$에서 연속이 아니므로 평균값 정리를 적용할 수 없다.

연습문제 5.3

1. (a) 로피탈의 법칙을 적용할 수 없으며 정답은 $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2+4} = 0$이다.

(b) 로피탈의 법칙을 적용할 수 없으며 $\lim_{x\to 1^-} \frac{4x+3}{x^4-1} = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} \frac{4x+3}{x^4-1} = \infty$이므로 극한은 존재하지 않는다.

(c) 로피탈의 법칙을 적용할 수 없으며 $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \infty$이므로 극한은 존재하지 않는다.

3. (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$

(c) ∞ (d) ∞

(e) $\ln 10$ (f) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$

(g) ∞ (h) 0

5. (a) $\frac{1}{6}$ (b) 0

(c) 0 (d) 0

연습문제 5.4

1. (a) $(-\infty, 0)$에서 아래로 오목이고 $(0, \infty)$에서 위로 오목이다.

(b) $(-\infty, -1)$에서 위로 오목이고 $(-1, \infty)$에서 아래로 오목이다.

(c) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$에서 위로 오목이다.

(d) $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$에서 아래로 오목이고 $(0, 4)$에서 위로 오목이다.

(e) $(-\infty, 1)$에서 아래로 오목이고 $(1, \infty)$에서 위로 오목이다.

(f) $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$에서 위로 오목이고 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$에서 아래로 오목이다.

(g) $(-\infty, 0)$에서 위로 오목이고 $(0, \infty)$에서 아래로 오목이다.

(h) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$에서 아래로 오목이다.

3. (a) 변곡점 $\left(\frac{1}{2}, 10\right)$ 이고 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 에서 아래로 오목이고 $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ 에서 위로 오목이다.

(b) 변곡점은 없고 $(-\infty, \infty)$ 에서 위로 오목이다.

(c) 변곡점은 $(0, 0)$ 이고 $(-\infty, 0)$ 에서 아래로 오목이고 $(0, \infty)$ 에서 위로 오목이다.

(d) 변곡점은 없고 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 에서 위로 오목이다.

(e) 변곡점은 $(-2-\sqrt{2}, (6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}})$ 와 $(-2+\sqrt{2}, (6-4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}})$ 이고 $(-\infty, -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2}, \infty)$ 에서 위로 오목이고 $(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$ 에서 아래로 오목이다.

(f) 변곡점은 $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$ 이고 $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ 에서 아래로 오목이고 $\left(e^{-\frac{3}{2}}, \infty\right)$ 에서 위로 오목이다.

(g) 변곡점은 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi^2}{288}+\frac{1}{4}\right)$ 이고 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ 에서 아래로 오목이고 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 위로 오목이다.

(h) 변곡점은 없고 $[0, 2\pi]$ 에서 위로 오목이다.

5. (a) $x=\frac{5}{6}\pi$ 에서 극댓값 $\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi+1$ 을 갖고, $x=\frac{7}{6}\pi$ 에서 극솟값 $\frac{7\sqrt{3}}{6}\pi-1$ 을 갖는다.

(b) $x=\frac{5}{4}\pi$ 에서 극솟값 $-1-\frac{5}{4}\pi$ 를 갖고, $x=\frac{7}{4}\pi$ 에서 극댓값 $1-\frac{7}{4}\pi$ 를 갖는다.

(c) $x=0$ 에서 극솟값 1을 갖고, $x=\frac{\pi}{3}$ 에서 극댓값 $\frac{5}{4}$ 를 가지며 $x=-\frac{\pi}{3}$ 에서 극댓값 $\frac{5}{4}$ 를 갖는다.

(d) $x=\pi$ 에서 극댓값 $\frac{2}{3}$ 를 갖는다.

(e) $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 극댓값 0 을 갖는다.

(f) $x=-\pi$ 에서 극솟값 $\frac{1}{e}$ 을 갖고 $x=0$ 에서 극댓값 e 를 가지며 $x=\pi$ 에서 극솟값 $\frac{1}{e}$ 을 갖는다.

연습문제 5.5

1. (a) 최댓값 100　　　(b) 최솟값 $4\sqrt{5}$

3. 최대 넓이는 $50\,m^2$ 이다.

5. (a) 최댓값은 13이다.　　　(b) 최솟값은 $-\dfrac{5}{2}$ 이다.

7. 점 $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ 와 점 $(-\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ -\dfrac{1}{2})$

9. $\dfrac{4}{27}\pi r^2 h$

11. $2r$ 원